

## LINEARE ALGEBRA UND ANALYTISCHE GEOMETRIE II

### Aufgabe 1 (schriftlich) - Aufbaukurs

Sei  $K$  ein Körper.

- Zeigen Sie:  $SL(n, K) := \{A \in GL(n, K); \det A = 1\}$  ist ein Normalteiler von  $GL(n, K)$ .
- Sei  $K$  ein endlicher Körper mit  $q$  Elementen. Wieviele Elemente besitzt  $SL(n, K)$ ?
- Sei  $Z = \{A \in GL(n, K); A \cdot X = X \cdot A \text{ für alle } X \in GL(n, K)\}$ .  
Zeigen Sie  $Z \cap SL(n, K) \triangleleft GL(n, K)$  und berechnen Sie die Ordnung dieses Normalteilers, wenn  $K$  ein endlich Körper mit  $q$  Elementen ist.

**Aufgabe 2 (schriftlich)** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum,  $\alpha : V^n \rightarrow K$  eine Volumenform und  $\varphi$  ein Automorphismus von  $V$ .

Zeigen Sie, dass

$$\beta : V^n \rightarrow K \text{ definiert durch } (w_1, \dots, w_n) \mapsto \alpha(\varphi(w_1), \dots, \varphi(w_n))$$

eine Volumenform ist.

**Aufgabe 3 (schriftlich)** Lösen Sie in Mathematik Online die interaktiven Aufgaben mit Nr 4, 5, 33 und 306.

Hinweise: Die Spur  $Sp(A)$  einer Matrix  $A = (a_{ij})$  ist die Summe der Hauptdiagonalelemente, also  $Sp(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ . Geben Sie jeweils den Lösungsweg an.

**Aufgabe 4 (mündlich)** Welche der folgenden Behauptungen sind richtig? Geben Sie entweder ein Gegenbeispiel oder einen Beweis an.

$A$  und  $B$  seien  $n \times n$ -Matrizen über einem Körper  $K$ .

- Ist  $v$  ein Eigenvektor von  $A$ , dann ist  $v$  ein Eigenvektor von  $A^n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ .
- Ist  $v$  ein Eigenvektor von  $A$  und von  $B$ , dann auch von  $A \cdot B$ .
- Falls  $A \cdot B = B \cdot A$  vorausgesetzt wird, dann ist ein Vektor  $v$ , der Eigenvektor von  $A$  und von  $B$  ist auch ein Eigenvektor von  $A \cdot B$ .
- Falls  $A \cdot B = B \cdot A$  vorausgesetzt wird, dann ist ein Eigenwert  $\lambda$ , der Eigenwert von  $A$  und von  $B$  ist auch ein Eigenwert von  $A \cdot B$ .
- Ist  $Rg(A \cdot B) = 0$ , dann besitzen  $A$  und  $B$  den Eigenwert 0.
- Besitzen  $A$  und  $B$  den Eigenwert 0, dann auch  $A \cdot B$ .

Abgabe der schriftlichen und Besprechung der mündlichen Aufgaben am 24. April  
in den Übungen.