Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Aufgabe 1 (mündlich) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Durch $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ ist ein Skalarprodukt im Vektorraum $\mathbb{C}^n$ definiert.

b) Die Abbildung $\alpha: \mathbb{F}_4 \to \mathbb{F}_4,\ x \mapsto x^2$ ist ein Körperautomorphismus.

c) Seien $A, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ist A positiv definit, dann auch $T^t A T$.

d) Eine reelle Matrix ist genau dann positiv definit, wenn ihre Determinante größer 0 ist.

Aufgabe 2 (schriftlich) Sei K der Kegel mit Gleichung

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Bestimmen Sie alle Tangenten an K durch den Punkt $(1,0,0)$. Was entsteht geometrisch als Vereinigung aller dieser Tangenten?

Aufgabe 3 (schriftlich) Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen $b_i : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}[X]$ definieren.

$$\begin{aligned}
b_1(f,g) &= \sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n)e^{-n},\\
b_2(f,g) &= \int_0^1 f(x)g(x)\,dx,\\
b_3(f,g) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}\,dx,\\
b_4(f,g) &= \int_0^1 (f(x)^2 + g(x)^2)\,dx.
\end{aligned}$$

Was ändert sich, wenn man $\mathbb{R}[X]$ durch den Vektorraum der stetigen beschränkten Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ersetzt?

Aufgabe 4 (schriftlich) Sei $U \subset \mathbb{R}^4$ der von

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

aufgespannte Untervektorraum. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

Abgabe der schriftlichen und Besprechung der mündlichen Aufgaben am 19. Juni in den Übungen.