Name, Vorname	Matrikelnummer	Name des Tutors

Aufgabe	1	2	3	4	Summe
Punkte					

04. 07. 2007 — Prof. W. Kimmerle

Scheinklausur zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie II

Bitte lesen Sie sich die folgenden Vorbemerkungen durch, bevor Sie die Aufgaben bearbeiten:

- Mobiltelefone müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Bei den Aufgaben 1 und 2 werden nur die Ergebnisse bewertet, geben Sie Ihren Lösungsweg also **nicht** an. In Aufgabe 1 geben richtige Antworten einen Punkt und falsche Antworten einen Minuspunkt. Nicht beantwortete Fragen geben keinen Abzug. Die Minuspunkte werden nur innerhalb dieser Aufgabe verrechnet und übertragen sich nicht auf die anderen Aufgaben.
- Die Aufgabe 1 darf auch von Teilnehmern des Basiskurses bearbeitet werden.
- Geben Sie für die Aufgaben 3 und 4 den kompletten Lösungsweg an.
- Sie haben 80 Minuten Zeit, die Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1 - AUFBAUKURS (5 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Sei G eine endliche Gruppe.

	wahr	falsch
Jede Untergruppe von G ist zyklisch.	☐	☐
Ist G zyklisch, dann gibt es zu jedem Teiler d von $\lvert G\rvert$ eine Untergruppe U von G mit $\lvert U\rvert = d$.	☐	☐
Ist G abelsch, dann sind alle Untergruppen von G Normalteiler.	☐	☐
Für alle $g \in G$ ist die Ordnung $o(g)$ ein Teiler von $\lvert G\rvert$.	☐	☐
Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gilt $a^n = a$.	☐	☐

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei $r \in \mathbb{R}$ und

$$A_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & r^2 & 2 & 0 \\ r & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie:

$\det A_r$:	
alle $r \in \mathbb{R}$, für die A_r normal ist	
alle $r \in \mathbb{R}$, für die A_r diagonalisierbar ist über $\mathbb{R}$	
alle $r \in \mathbb{R}$, für die A_r orthogonal diagonalisierbar ist	

Sei nun $r = -1$. Dann ist durch $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^t A_{-1} \mathbf{y}$ eine Bilinearform $b: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben.

Ist b symmetrisch?	
Ist b positiv definit?	
Ist b ein Skalarprodukt?	

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $D = T^t A T$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei die Quadrik Q gegeben durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 4xz - 4x - 9z + 5 = 0.$$

a) Schreiben Sie die Gleichung der Quadrik in der Form

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} + 2\mathbf{a}^t\mathbf{x} + b = 0$$

mit $\mathbf{x} = (x, y, z)^t$, $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ und $b \in \mathbb{R}$.

b) Entscheiden Sie, ob Q eine kegelige, eine parabolische oder eine Mittelpunktsquadrik ist.

c) Bestimmen Sie die affine Normalform von Q und skizzieren Sie diese bezüglich der neuen Koordinaten.