Fachbereich Mathematik
W. Kimmerle/ S. Poehler

Blatt 6
WS 2006/2007

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Aufgabe 1 (mündlich) Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck. Mit D_g sei die Drehung des Dreiecks um g Grad mit dem Mittelpunkt als Zentrum bezeichnet und mit S_1, S_2 und S_3 die Spiegelungen an den drei verschiedenen Seitenhalbierenden. Zeigen Sie, dass $\{id, D_{120}, D_{240}, S_1, S_2, S_3\}$ mit der Komposition eine Gruppe bildet und dass diese Gruppe nicht abelsch ist. Gibt es weitere Abbildungen, die die Eckpunkte des Dreiecks auf sich abbilden?

Aufgabe 2 (mündlich) Welche der folgenden Mengen bilden mit den angegebenen Verknüpfungen eine Gruppe?

a) $\{\text{wahr, falsch}\}$ mit der Konjunktion $\wedge$.

b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der Division.

c) Für $n \in \mathbb{N}$: $\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ mit der komplexen Multiplikation.

d) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ bijektiv}, f(1) = 1\}$ mit der Hintereinanderausführung $\circ$.

e) $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ bijektiv}, f(1) = 2\}$ mit der Hintereinanderausführung $\circ$.

Aufgabe 3 (mündlich) - Aufbaukurs Sei $(H, *)$ eine kommutative Halbgruppe mit Kürzungsregel. Zeigen Sie: Gibt es in H Elemente a und b mit $b * a = a$, dann ist $(H, *)$ ein Monoid mit Einselement b.

Aufgabe 4 (schriftlich) Sei X eine Menge. Die *symmetrische Differenz* zweier Teilmengen $A, B \subset X$ ist definiert als

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ mit der Verknüpfung $\triangle$ eine Gruppe bildet.

Aufgabe 5 (schriftlich)

a) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Für alle $g \in G$ gelte $g \cdot g = e$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

b) Sei M eine endliche Menge und $*$ eine assoziative Verknüpfung auf M mit neutralem Element e, d.h., für alle $m \in M$ gilt $m * e = e * m = m$. Außerdem gelte für alle $x, y, m \in M$:

$$x * m = y * m \;\Rightarrow\; x = y.$$

Zeigen Sie, dass jedes $m \in M$ ein Linksinverses besitzt, dass also ein $\overline{m}$ existiert mit $\overline{m}m = e$. (D.h., $(M, *)$ ist eine Gruppe.)

Abgabe der schriftlichen und Besprechung der mündlichen Aufgaben am 28. November in den Übungen.