Fachbereich Mathematik
W. Kimmerle/ S. Poehler

Blatt 9
WS 2006/2007

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Aufgabe 1 (mündlich) Sei $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Zeigen Sie, dass

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0\}$$

ein $n-1$ dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 2 (mündlich) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & \pi \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle möglichen Produkte aus zwei dieser fünf Matrizen.

Aufgabe 3 (mündlich) Eine Gruppe von n Erstsemestern wird von ihrem Tutor in einer Reihe hintereinander aufgestellt. Jeder Student bekommt einen roten, grünen oder blauen Hut aufgesetzt. Für jeden Studenten sind die Hutfarben aller vor ihm stehenden sichtbar, seine eigene und die der hinter ihm stehenden Kommilitonen jedoch nicht.
Beginnend mit dem hintersten Studenten muss nun der Reihe nach jeder eine Farbe nennen. Die Antwort hören alle anderen, sie darf aber nur „rot", „grün" oder „blau" sein.
Jeder Student, der seine eigene Hutfarbe nennt, erhält ein Gummibärchen vom Tutor. Überlegen Sie sich eine Strategie, als Gruppe einen möglichst hohen Gewinn zu machen.
(In den Antworten darf wirklich nur die Information über die Farbe enthalten sein, Sie dürfen z.B. nicht über die Tonhöhe oder eine verzerrte Aussprache Informationen weitergeben.)

Aufgabe 4 (schriftlich)

a) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ genau dann injektiv ist, wenn sie surjektiv ist.

b) Konstruieren Sie eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, die injektiv, aber nicht surjektiv ist und eine lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, die surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Aufgabe 5 (schriftlich) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie: Die Abbildung $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$ ist linear.

b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}^3$, die von ψ auf den Vektor $(0, 2, -1)^T$ abgebildet werden.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n + \frac{n^2+n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abgabe der schriftlichen und Besprechung der mündlichen Aufgaben am 19. Dezember in den Übungen.