Fachbereich Mathematik | Blatt 12
W. Kimmerle/ S. Poehler | WS 2006/2007

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Aufgabe 1 (mündlich) Sei V ein Vektorraum mit Basis $B = \{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\}$ und W ein Vekotrraum mit Basis $C = \{\mathbf{c_1}, \ldots, \mathbf{c_5}\}$. Die lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ sei gegeben durch

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{b_1}) &= \mathbf{c_5} + 2\mathbf{c_3} - \mathbf{c_1}, \\
\varphi(\mathbf{b_2}) &= -\mathbf{c_1} + 5\mathbf{c_3} + 23\mathbf{c_2} - 10\mathbf{c_4} + 9\mathbf{c_5}, \\
\varphi(\mathbf{b_3}) &= 7\mathbf{c_5} + 4\mathbf{c_3} - \mathbf{c_1} + 6\mathbf{c_2} - 12\mathbf{c_4}.
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Matrix der Abbildung φ bezüglich

a) den Basen B und C,

b) den Basen $\{\mathbf{b_1} + \mathbf{b_2}, \mathbf{b_2} + \mathbf{b_3}, \mathbf{b_3} + \mathbf{b_1}\}$ und $\{\mathbf{c_1} - \mathbf{c_2}, \mathbf{c_2}, \mathbf{c_3}, \mathbf{c_4} + \mathbf{c_5}, \mathbf{c_5}\}$.

c) den Basen $\{\mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}, \mathbf{b_1}\}$ und $\{\mathbf{c_3}, \mathbf{c_2}, \mathbf{c_4}, \mathbf{c_5}, \mathbf{c_1}\}$.

Aufgabe 2 (mündlich) - Aufbaukurs

a) Bestimmen Sie alle Untergruppen der symmetrischen Gruppe S_3. Welche davon sind Normalteiler?

b) Sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe vom Index 2. Zeigen Sie, dass U ein Normalteiler ist.

Aufgabe 3 (mündlich) - Wiederholungsfragen
Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist:

a) Ist M eine Menge, dann ist $\big(\{f : M \to M \mid f \text{ bijektiv }\}, \circ\big)$ eine Gruppe.

b) $(p \wedge q) \Rightarrow p$ ist eine aussagenlogische Tautologie.

c) Die Matrixmultiplikation ist kommutativ.

d) Der Kern einer linearen Abbildung ist ein Vektorraum.

e) Reelle lineare Gleichungssysteme haben keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen.

f) Sind A und B Matrizen der gleichen Größe, dann ist $\mathrm{Rg}(A+B) = \mathrm{Rg}(A) + \mathrm{Rg}(B)$.

Aufgabe 4 (schriftlich)

a) Sei $V = \{p \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(p) \leq 4\}$. Bestimmen Sie die Matrix ${}_B\psi_B$ der Abbildung $\psi : V \to V$, $p \mapsto p'$ bezüglich der Basis $B = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$.

b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei W der Vektorraum der reellen $n \times n$ - Matrizen. Wählen Sie eine Basis B von W und bestimmen Sie die Matrix ${}_B\varphi_B$ der Abbildung $\varphi : W \to W$, $A \mapsto A + A^t$.

Aufgabe 5 (schriftlich) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abgabe der schriftlichen und Besprechung der mündlichen Aufgaben am 23. Januar in den Übungen.