Name, Vorname	Matrikelnummer	Name des Tutors

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte								

25. 01. 2007 **Scheinklausur zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie I** Prof. W. Kimmerle

Bitte lesen Sie sich die folgenden Vorbemerkungen durch, bevor Sie die Aufgaben bearbeiten:

- Mobiltelefone müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Bei den Aufgaben 1 bis 5 werden nur die Ergebnisse bewertet, geben Sie Ihren Lösungsweg also **nicht** an. Bei den Aufgaben 1 und 2 geben richtige Antworten einen Punkt und falsche Antworten einen Minuspunkt. Nicht beantwortete Fragen geben keinen Abzug. Die Minuspunkte werden nur innerhalb der einzelnen Aufgaben verrechnet und übertragen sich nicht auf die anderen Aufgaben.
- Geben Sie für die Aufgaben 6 und 7 den kompletten Lösungsweg an.
- Sie haben 75 Minuten Zeit, die Aufgaben zu bearbeiten.
- Wer 30 von 34 möglichen Punkten erziehlt, erhält die Note 1,0.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

	wahr	falsch
$\varphi(0) = 0$.	□	□
Ist $V = W$, dann ist φ genau dann injektiv, wenn φ surjektiv ist.	□	□
Sind $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear abhängig, dann sind es auch $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$.	□	□
$\varphi(V)$ ist ein Untervektorraum von W.	□	□

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Welche der folgenden Mengen bilden mit den angegebenen Verknüpfungen eine Gruppe?

	ja	nein
$\{z \in \mathbb{C} \mid z^7 = 1\}$ mit der Multiplikation.	□	□
$\mathbb{R}$ mit der Subtraktion.	□	□
$\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f$ bijektiv, $f(1) = 1\}$ mit der Hintereinanderausführung $\circ$.	□	□
$\{M \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \mid M$ ist invertierbar$\}$ mit der Matrixmultiplikation.	□	□

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Seien p und q aussagenlogische Variable. Ergänzen Sie die folgende Wahrheitswerttafel:

p	q	$(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$
w	w	
w	f	
f	w	
f	f	

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ und W ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$. Bezüglich der Basen B und C sei $\psi : V \to W$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -5 & \pi & 2 \\ 1 & 12 & -9 \\ 6 & 0 & 6 \\ \pi^2 & -8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Matrix an, die ψ darstellt bezüglich der Basen

$\{b_1 - b_2, b_2, b_2 - b_3\}$ und C	
B und $\{c_2, c_3, c_4, c_1\}$	

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei $\varphi:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $x \mapsto Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seien außerdem $v_1 = (2,\, 0,\, -2)^t$, $v_2 = (1,\, 1,\, 0)^t$ und $v_3 = (1,\, 1,\, 1)^t$. Bestimmen Sie

$\dim L(v_1,\, v_2,\, v_3)$:	
$\varphi(v_1)$ und $\varphi(v_3)$:	
die Lösungsmenge von $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:	
die Lösungsmenge von $Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:	
die Lösungsmenge von $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$:	
eine Basis des Kerns von φ :	
alle $t \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Rg}(A + tE_3) < 3$:	
die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$:	

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei V ein Vektorraum und seien U_1 und U_2 Untervektorräume von V. Zeigen Sie, dass $U_1 \cup U_2$ genau dann ein Untervektorraum von V ist, wenn $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$ gilt.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$. Auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sei für $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ durch

$$A \sim B \iff A \bigtriangleup B \text{ ist eine endliche Menge}$$

eine Relation definiert. Untersuchen Sie, ob $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Hinweis: $A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ist die symmetrische Differenz der Mengen A und B.