Mathematische Grundlagen für das Lehramt

Winter 2013/14

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Ein Element $c \in \mathbb{R}$ heißt **obere Schranke** von A (in $\mathbb{R}$), falls $a \leq c$ für alle $a \in A$ gilt. Falls A eine obere Schranke besitzt, heißt A **nach oben beschränkt**. c heißt **kleinste obere Schranke** oder **Supremum** von A (in $\mathbb{R}$), falls gilt:

- c ist obere Schranke von A,
- Ist d obere Schranke von A, dann ist $c \leq d$

Aufgabe 34.
Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ der reellen Zahlen ein Supremum besitzt. Zeigen Sie dazu der Reihe nach die folgenden Aussagen.

Sei also $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt.

(a) Zeigen Sie, dass es ein $b_0 \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass b_0 eine obere Schranke von A ist und $b_0 - 1$ keine obere Schranke von A ist.

Nun definiert man sich eine Folge (b_n) in $\mathbb{Q}$ durch:

$$b_n = \begin{cases} b_{n-1} - \frac{1}{2^n} & \text{falls } b_{n-1} - \frac{1}{2^n} \text{ obere Schranke von } A \text{ ist} \\ b_{n-1} & \text{falls } b_{n-1} - \frac{1}{2^n} \text{ keine obere Schranke von } A \text{ ist} \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie, dass b_n für alle $n \in \mathbb{N}$ eine obere Schranke von A ist, während $b_n - \frac{1}{2^n}$ keine obere Schranke ist.

(c) Zeigen Sie, dass für $n < m$ gilt $b_n - \frac{1}{2^n} < b_m$ und $|b_n - b_m| < \frac{1}{2^n}$.

(d) Zeigen Sie, dass (b_n) eine Cauchyfolge ist.

Somit ist durch $b = \overline{(b_n)} \in CF(\mathbb{Q})/NF(\mathbb{Q})$ eine reelle Zahl definiert. Man kann b auch als Grenzwert der Folge (b_n) auffassen.

(e) Zeigen Sie, dass b obere Schranke von A ist.

(f) Zeigen Sie, dass b das Supremum von A ist.

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $x \in D$. f heißt **stetig** in x, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; y \in D, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Aufgabe 35.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die stetig in jedem Punkt von $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ ist. Sei $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Zeigen Sie, dass es ein $x \in [a, b]$ gibt mit $f(x) = 0$. Betrachten Sie dazu die Menge $A := \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$.