Mathematische Grundlagen für das Lehramt

Winter 2013/14

Aufgabe 12.
Beweisen Sie: Die Vereinigung abzählbar vieler abzälbarer Mengen ist abzählbar.

Aufgabe 13.
Welche der folgenden Mengen sind gleichmächtig? Geben Sie gegebenfalls Bijektionen an.

(a) $\mathbb{N}$,

(b) $\mathbb{R}$,

(c) das reelle, offene Intervall $(0, 1)$,

(d) das reelle, abgeschlossene Intervall $[0, 1]$,

(e) die algebraischen Zahlen in $\mathbb{R}$ (das sind alle reellen Zahlen, welche als Nullstellen eines Polynoms $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, ..., a_n \in \mathbb{Q}$ auftreten.),

(f) die Menge $\{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid \forall k \in \mathbb{N} : x_k \in \{0, 1\}\}$.

Aufgabe 14.
Gegeben seien die Abbildungen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch folgende Abbildungsvorschriften.

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & n \neq 3 \\ 1 & n = 3 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(n) = \begin{cases} n+1 & n = 1,2 \\ 1 & n = 3 \\ n+2 & n > 3 \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Es lässt sich leicht verifizieren, dass beide Abbildung injektiv, aber nicht surjektiv ist. Nach dem Satz von Cantor-Schröder-Bernstein gibt es eine bijektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. (Das ist nicht verwunderlich, die Identität ist eine solche.) Ziel der Aufgabe ist es, die Bijektion aus dem Beweis zum Satz zu finden. Verifizieren Sie den Beweis des Satzes anhand des Beispiels (soweit wir in der Vorlesung gekommen sind). Überlegen Sie sich dazu, wie die Abbildungen α und β aussehen und bestimmen Sie die Mengen $\alpha^i(A)$, $\beta^i(B)$, A_∞, B_∞, $g(\beta^i(B))$, $f(\alpha^i(A))$, sowie die Komplemente $\alpha^i(A)\backslash g(\beta^i(B))$, $\beta^i(B)\backslash f(\alpha^i(A))$, $f(\alpha^i(A))\backslash\beta^{i+1}(B)$ und $g(\beta^i(B))\backslash\alpha^{i+1}(A)$.