Mathematische Grundlagen für das Lehramt

Winter 2013/14

Aufgabe 24.

Sei M eine Menge, $\mathfrak{P}(M)$ ihre Potenzmenge. Auf $\mathfrak{P}(M)$ sind durch $\cap$ und Δ Verknüpfungen definiert, wobei $A\Delta B = A\backslash B \cup B\backslash A$ ist für Teilmengen $A, B \subseteq M$. Zeigen Sie, dass $(\mathfrak{P}(M), \Delta, \cap)$ ein kommutativer Ring ist.

Aufgabe 25.

Sei K ein Körper, dann ist $R = M_{2\times 2}(K)$ mit der Addition und Multiplikation von Matrizen ein Ring.

(a) Finden Sie einen Nullteiler in R.

(b) Sei

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in K \right\}.$$

Ist I ein Rechtsideal bzw. ein Linksideal von R?

Aufgabe 26.

$R = \mathbb{Z}[x]$, die Menge der Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten, ist Ring mit der üblichen Addition und Multiplikation von Polynomen.

(a) Bestimmen Sie alle Einheiten von R.

(b) Ist $p(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1$ irreduzibel oder nicht?

(c) Nun betrachten wir $p(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1$ als Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$, d. h. als Element von $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}[x]$ für $n = 2$ bzw. für $n = 3$. Ist $p(x)$ irreduzibel? Falls nicht, schreiben Sie $p(x)$ als Produkt von irreduziblen Elementen.

Aufgabe 27.

Zeigen Sie Teil (c) und (d) von Lemma 4.4:

Sei R ein Integritätsbereich. Dann gilt

(c) Ist p prim und $u \in U(R)$ eine Einheit, dann ist up prim.

(d) Sind p und q prim und $p|q$, dann ist $p = uq$ für eine Einheit $u \in U(R)$.