Prof. Dr. Klaus Höllig 7. September 2007

Prüfung zur Numerischen Mathematik

Lösungen

Aufgabe 1 Geben Sie (ohne Beweis) an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

1. Die Folge $A^n x / \|A^n x\|$ konvergiert nur, wenn alle Eigenwerte von A reell sind.

2. Eine Givens-Rotation vergrößert die Absolutbeträge der Matrix-Einträge nicht.

3. Die Methode der konjugierten Gradienten liefert die Lösung eines symmetrischen, positiv definiten linearen Gleichungssystems nach endlich vielen Schritten.

4. Ein lineares Programm besitzt höchstens endlich viele Lösungen.

5. Die Normalengleichungen sind für jede Matrix lösbar.

Lösung

1. falsch, es genügt, wenn es einen betragsmäßig größten Eigenwert gibt.

2. falsch, der erste Eintrag wird zur Norm der Spalte und diese ist i.A. größer als ein Eintrag.

3. richtig, die Unterräume werden nach endlich vielen Schritten den gesammten Raum aufspannen.

4. falsch, siehe Aufgabe 5

5. richtig, da das Bild der Matrix ein Unterraum ist, ist die Projektion immer möglich.

Aufgabe 2 Zerlegen Sie die Gleitpunkt-Berechnung des Ausdrucks

$$y = \frac{x_1}{x_1 + x_2}$$

in elementare Operationen und bestimmen Sie die Konditionszahlen c_k. Geben Sie für $x_1, x_2 > 0$ bestmögliche Schranken für c_k an und damit eine Abschätzung für $|\Delta y|/|y|$ bei relativen Fehlern der Eingabewerte $\leq$eps.

Lösung

Die Rechenschritte sind

$$\begin{aligned} x_3 &= x_1 + x_2 \\ y = x_4 &= x1/x3 \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Konditionszahlen $c_k = \left|\frac{\partial y}{\partial x_k}\right| \left|\frac{x_k}{y}\right|$ als

$$\begin{aligned} c_1 &= \left|\frac{x_2}{(x_1+x_2)^2}\right| \left|\frac{x_1}{x_1/(x_1+x_2)}\right| = \left|\frac{x_2}{x_1+x_2}\right| \\ c_2 &= \left|\frac{-x_1}{(x_1+x_2)^2}\right| \left|\frac{x_2}{x_1/(x_1+x_2)}\right| = \left|\frac{x_2}{x_1+x_2}\right| \\ c_3 &= \left|\frac{-x_1}{x_3^2}\right| \left|\frac{x_3}{x_1/(x_1+x_2)}\right| = 1\,. \end{aligned}$$

Mit der Schranke $c_1, c_2 < 1$ erhält man

$$\frac{|\Delta y|}{|y|} \leq \text{eps}\left(1 + \sum_{k=1}^{3} c_k\right) = 4\text{eps}$$

Aufgabe 3 Schreiben Sie ein MATLAB-Programm

`function [a,b]=chol_tri(c,d)` ,

das die Cholesky-Faktorisierung

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ b_1 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ & a_2 & \ddots & \\ & & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & c_1 & & 0 \\ c_1 & d_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & c_{n-1} & d_n \end{pmatrix}$$

einer positiv definiten symmetrischen Tridiagonalmatrix berechnet.

Drücken Sie dazu zunächst d_k und c_k durch a_j und b_j aus.

(Die Vektoren a, b, c, d enthalten die von Null verschiedenen Elemente der Matrizen.)

Lösung

Multiplikation von R^{t} und R ergibt

$$d_1 = a_1^2\,, \quad d_k = a_k^2 + b_{k-1}^2 \; (k = 2, ..., n)\,, \quad c_k = a_k b_k \; (k = 1, ..., n-1)\,.$$

Dies führt auf folgendes Programm

```
function [a,b]=chol_tri(c,d)

a(1)=sqrt(d(1));
for k=1:length(c)
  b(k)=c(k)/a(k);
  a(k+1)=sqrt(d(k+1)-b(k)^2);
end
```

Aufgabe 4 Führen Sie für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

einen Schritt $x \to y$ der Gauß-Seidel-Iteration mit Startwert $x = (2,2)^{\mathrm{t}}$ durch. Bestimmen Sie die Iterationsmatrix Q sowie deren Spektralradius.

Lösung

Allgemein gilt

$$Dy = b - Ly - Rx\,, \quad A = L + D + R\,.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} y_1 &= (5 - 1 \cdot 2)/4 = 3/4 \\ y_2 &= (3 - 1 \cdot 3/4)/1 = 9/4\,. \end{aligned}$$

Die Iterationsmatrix ist

$$\begin{aligned} Q &= -(D+L)^{-1}R = -\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1/4 \\ 0 & +1/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und $\varrho = 1/4$.

Aufgabe 5 Bestimmen Sie die (einzige) zulässige Basislösung und die zulässige Menge D des linearen Programms

$$(\gamma, 0, 1)x \to \min\,, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x \geq 0\,.$$

Für welche Werte des Parameters $\gamma \in \mathbb{R}$ existieren keine, eine bzw. unendlich viele Lösungen x und wie lauten diese?

Lösung

Die einzige zulässige Basislösung ist $x = (3, 0, 4)^{\mathrm{t}}$.

Da

$$\text{Kern}\, A = \text{span}\{(2, 1, 2)^{\mathrm{t}}\}$$

ist

$$D = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0\,.$$

Für $\gamma = -1$ ist $c^{\mathrm{t}}v = 0$ also ist dann jedes $x \in D$ Lösung.

Für $\gamma > -1$ ist $c^{\mathrm{t}}v > 0$, also existiert eine minimale Lösung ($t = 0\,,\ x = (3, 0, 4)^{\mathrm{t}}$).

Für $\gamma < -1$ ist $c^{\mathrm{t}}v < 0$. Die Zielfunktion ist auf D unbeschränkt und daher exisitert kein Minimum.

Aufgabe 6 Transformieren Sie die 3×3-Matrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 10 \end{array} \right)$$

durch eine Householdertransformation der letzten beiden Zeilen auf obere Dreiecksform und geben Sie die 2×2 Transformationsmatrix in der faktorisierten Form $E - \frac{1}{r}\, dd^{\mathrm{t}}$ an. Bestimmen Sie ebenfalls die Lösung x des Ausgleichsproblems $e = |Ax - b| \to \min$ und geben Sie auch den Fehler e an.

Lösung

Die Householder-Transformation wird auf die unteren beiden Zeilen angewandt, und basiert auf dem Vektor $(4,3)^{\mathrm{t}}$ mit der Norm 5. Folglich ist

$$d = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad r = \|c\| d_1 = 45\,.$$

Mit

$$d^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = 30\,, \quad E \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} - \frac{30}{45} d = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

ergibt sich die Dreiecksform

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 8 \end{array} \right),$$

aus der sich die Ausgleichslösung ablesen läßt:

$$x_2 = 6/5\,, \quad x_1 = -3/5\,.$$

Der Fehler ist $e = 8\,.$