ISA, Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. C. Hesse

Höhere Mathematik I–II **Diplomvorprüfung** **3. 9. 2007**

1. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
el, geod, kyb

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 handbeschriebene DIN A4 Blätter.
- Bei den **Aufgaben 1–4** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die folgenden Angaben könnten hilfreich sein:

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

$$\boxed{\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Potenzreihen:

$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$	$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}$
$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}$	$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \quad -1 < x \leq 1$

- In dieser Klausur können bis zu **50 Punkte** erreicht werden.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab Mitte Oktober im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 8. Stock, durch Aushang bekannt gegeben (Ankündigung auf der Hompage zu HM 2).

  Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Soweit mündliche Nachprüfungen erforderlich sein sollten, werden die nötigen Informationen zusammen mit den Prüfungsergebnissen bekannt gegeben. Eine individuelle Benachrichtigung der betreffenden Kandidatinnen und Kandidaten erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an der Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (11 Punkte):
Gegeben sei die von dem reellen Parameter α abhängige Matrix

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1+3\alpha & 2-4\alpha \\ 2-4\alpha & 4-3\alpha \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von $A(0)$.

b) Zeigen Sie: Die Eigenvektoren von $A(0)$ sind auch Eigenvektoren von $A(\alpha)$.
Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

c) Durch die Gleichung

$$(1+3\alpha)x_1^2 + (4-3\alpha)x_2^2 + (4-8\alpha)x_1x_2 + 2\sqrt{5}x_1 - \sqrt{5}x_2 = 0$$

ist eine Quadrik im $\mathbb{R}^2$ gegeben. Geben Sie eine orthogonale Matrix S an, so dass nach der Transformation $x = Sy$ mit $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ die Quadrik durch eine Gleichung der Gestalt

$$c_1y_1^2 + c_2y_2^2 + d_1y_1 + d_2y_2 = 0$$

dargestellt wird. Wie lauten die Koeffizienten c_1, c_2, d_1 und d_2 ?

d) Geben Sie den Typ der Quadrik für $\alpha = 0$ und α=1 an.
Für welchen Wert von α ergibt sich ein Kreis?

Aufgabe 2 (8 Punkte):
Die reelle Folge (a_n) sei durch folgende Rekursion definiert:

$$a_0 := 0\ , \quad a_1 := 1\ , \quad a_{n+1} := \frac{3}{2}\,a_n - \frac{1}{2}\,a_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

a) Sei

$$M := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_n := \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Stellen Sie für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ den Vektor x_{n+1} mit Hilfe von M und x_n dar.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von M.

c) Stellen Sie den Startvektor $x_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Eigenvektoren von M dar.

d) Bestimmen Sie mit Hilfe von c)

$$M^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \lim_{n\to\infty} M^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

und hiermit $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 3 (11 Punkte):
Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) = x \cdot (y - 2) \cdot (y - x^2 + 3).$$

a) Bestimmen und skizzieren Sie die Nullstellenmenge von f, also die Menge

$$N_0 := \{(x, y) \,|\, f(x, y) = 0\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Skizzieren Sie außerdem die Bereiche, in denen f positiv bzw. negativ ist.

b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f und zeichnen Sie diese in die Skizze ein.

c) Geben Sie die Art der in b) ermittelten kritischen Punkte an.

Hinweis: Hierbei kann es nützlich sein, a) und b) zu verwenden.

Aufgabe 4 (7 Punkte):
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x + (x^2 - 2x) \ln x \quad (x > 0).$$

a) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x)$.

b) Berechnen Sie $f'(x)$ und untersuchen Sie das Verhalten von $f'(x)$ für $x \downarrow 0$.

c) Die Gleichung $f'(x) = 0$ besitzt zwei Lösungen x_1, x_2 mit $x_1 < x_2$. Bestimmen Sie x_1 und x_2.

Betrachten Sie nun den Ausdruck $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ und zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass $f(x_1) > f(x_2)$ gilt.

Wie verhält sich $f(x)$ für $x > 1$? Welche Art von Extremstelle von f liegt bei x_1 bzw. x_2 vor?

Berechnen Sie $f(x_2)$ und skizzieren Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen von f im Intervall $[0, 2]$. $f(x_1)$ braucht nicht berechnet zu werden.

Verwenden Sie für die Zeichnung $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.6$.

Bitte beachten Sie auch die Aufgaben auf der Rückseite!

Name: | | **Matrikel–Nr.:** | |

Hinweise:

- Tragen Sie Name und Matrikelnummer in die oben vorgesehenen Kästchen ein und geben Sie dieses Blatt zusammen mit Ihren anderen Ausarbeitungen ab.
- Auf dieser Seite genügt es, die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen einzutragen. Die Angabe eines Lösungsweges oder einer Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 5 (7 Punkte): Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$ konvergiert für $\boxed{}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x+3)^n$ konvergiert für $\boxed{}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}(x^2-1)^n$ konvergiert für $\boxed{}$.

Aufgabe 6 (6 Punkte): Gegeben sei das von dem reellen Parameter t abhängige lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & t\,x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & \frac{1}{2}\,x_2 & + & t\,x_3 & = & 1 \end{array}\right\} \quad (\star)$$

a) $(\star)$ besitzt für $t \neq \boxed{}$ genau eine Lösung.

b) $(\star)$ besitzt für $t = \boxed{}$ unendlich viele Lösungen: $x = \boxed{}$.

c) $(\star)$ besitzt für $t = \boxed{}$ keine Lösung.