Lösungen zur Klausur

für mach, umw, fmt, bau, immo, tema, und zugehörige Technikpädagogik

Aufgabe 1: *(22 Punkte)*
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y^{(3)} - 4y'' + 5y' = 5 + 2e^x \,.$$

Bestimmen Sie die Lösung $\hat{f}$ mit $\hat{f}(0) = 2$, $\hat{f}'(0) = 3$, $\hat{f}''(0) = 1$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Das zur Differentialgleichung gehörige Polynom ist

$$p(X) = X^3 - 4X^2 + 5X = X(X^2 - 4X + 5);$$

es hat die einfachen Nullstellen 0 sowie $2 \pm i$. Ein Fundamentalsystem für die Lösungen der homogenen Differentialgleichung besteht also aus den Funktionen

$$1, e^{2x}\cos x, e^{2x}\sin x \;;$$

die zugehörige Wronski-Matrix ist

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2x}\cos x & e^{2x}\sin x \\ 0 & e^{2x}(2\cos x - \sin x) & e^{2x}(\cos x + 2\sin x) \\ 0 & e^{2x}(3\cos x - 4\sin x) & e^{2x}(4\cos x + 3\sin x) \end{pmatrix}.$$

Die Störfunktion $5 + 2e^x$ setzt sich aus der konstanten Störfunktion 5 und der Störfunktion $2e^x$ zusammen. Nach dem Superpositionsprinzip kann man eine partikuläre Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung aus partikulären Lösungen der inhomogenen Differentialgleichungen mit den Störfunktionen 5 bzw. $2e^x$ zusammensetzen.

Für eine partikuläre Lösung $\hat{f}_1$ zur Störfunktion $5 = 5 \cdot e^0$ liegt wegen $p(0) = 0$ der Resonanzfall vor. Da 0 einfache Nullstelle von $p(X)$ ist, kann man den Ansatz $\hat{f}_1(x) = sx$ machen; Einsetzen in die Differentialgleichung liefert $s = 1$, also

$$\hat{f}_1(x) = x \,.$$

Für eine partikuläre Lösung $\hat{f}_2$ zur Störfunktion $2e^x$ liegt wegen $p(1) \neq 0$ nicht der Resonanzfall vor. Der Ansatz $\hat{f}_2(x) = te^x$ und Einsetzen in die Differentialgleichung führt zu $t = 1$, also

$$\hat{f}_2(x) = e^x.$$

Eine partikuläre Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung ist also

$$\hat{f}_p(x) = x + e^x.$$

Sie erfüllt die Anfangsbedingungen

$$\hat{f}_p(0) = 1, \quad \hat{f}_p'(0) = 2, \quad \hat{f}_p''(0) = 1 \,.$$

Die gesuchte Lösung $\hat{f}$ ist also von der Form

$$\hat{f} = f + \hat{f}_p \,,$$

wobei f die Lösung der homogenen Differentialgleichung mit

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0 \tag{1}$$

ist. Letztere ergibt sich als Linearkombination des bereits angegebenen Fundamentalsystems

$$f(x) = r_1 + r_2 e^{2x} \cos x + r_3 e^{2x} \sin x \,,$$

deren Koeffizienten man aus dem linearen Gleichungssystem mit der Wronski-Matrix $M(0)$ als Koeffizientenmatrix und dem Vektor aus den Anfangsbedingungen (1) als rechter Seite

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhält. Die Lösung ist

$$r_1 = \frac{1}{5}\,, r_2 = \frac{4}{5}\,, r_3 = -\frac{3}{5}\,.$$

Die gesuchte Lösung der Differentialgleichung ist also

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} e^{2x} \cos x - \frac{3}{5} e^{2x} \sin x + x + e^x \,.$$

Aufgabe 2: *(10 Punkte)*
Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' + \frac{1}{x}y = \sin(x)$$

für $x > 0$. Bestimmen Sie die Lösung $\hat{f}$ der Differentialgleichung so, dass $\hat{f}(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
Die Lösung ist gegeben durch

$$\hat{f}(x) = (c + k(x))e^{-G(x)}$$

mit einer beliebigen, aber festen Stammfunktion G der Funktion $g(x) = \frac{1}{x}$, einer beliebigen, aber festen Stammfunktion k der Funktion $x \mapsto \sin(x)e^{G(x)}$ und der Konstanten $c = \frac{1}{\pi}e^{G(\frac{\pi}{2})} - k(\frac{\pi}{2})$.

Mit $G(x) = \ln(x)$ ermittelt man von $x \mapsto \sin(x)e^{G(x)} = \sin(x)e^{\ln(x)} = x\sin(x)$ eine Stammfunktion durch partielle Integration als $k(x) = -x\cos(x) + \sin(x)$ und gewinnt damit die Konstante $c = \frac{1}{\pi}e^{\ln(\frac{\pi}{2})} - k(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$. Also ist

$$\hat{f}(x) = \left(-\frac{1}{2} - x\cos(x) + \sin(x)\right)\frac{1}{x}\ .$$

Aufgabe 3: *(16 Punkte)*
Gegeben ist das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und der Bereich

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ z \geq 0\}.$$

Sei S die Randfläche von B; dies ist eine geschlossene Fläche, deren Innengebiet $B \setminus S$ ist.
Berechnen Sie den Fluss von g durch S

$$\iint\limits_S (g \bullet n)\, \mathrm{d}O\,,$$

wobei n der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor der Fläche S ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
Erste Lösung: Direkte Berechnung des Flusses.
Die geschlossene Fläche S ist die Vereinigung des Flächenstücks

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\} \\ &= \{(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\} \end{aligned}$$

mit den Viertelkreisflächen, die aus den Einheitskreisscheiben der x-y-Ebene, der x-z-Ebene und der y-z-Ebene durch die positiven Quadranten in diesen Ebenen herausgeschnitten werden. Auf diesen Viertelkreisflächen ist der Normalenvektor n senkrecht zum Vektorfeld g; sie liefern also keinen Beitrag zum Fluss.

Das Flächenstück S_1 ist ein Achtel der Einheitssphäre; für $(x, y, z) \in S_1$ ist also $n(x, y, z) = (x, y, z) = g(x, y, z)$ und folglich $g(x, y, z) \bullet n(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Wenn man dies nicht der geometrischen Anschauung entnehmen will, kann man n auf S_1 auch folgendermaßen berechnen. Das Flächenstück S_1 wird parametrisiert durch die Viertelkreisfläche

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

vermöge der Abbildung

$$f(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})\,.$$

Mit den Vektoren der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$$

ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2}+1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \ .$$

Durch Normierung auf Einheitslänge erhält man aus $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ den Einheitsnormalenvektor

$$n(f(x,y)) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix} \ ,$$

der tatsächlich nach außen gerichtet ist. Damit ist in der Tat

$$g(f(x,y)) \bullet n(f(x,y)) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix} = x^2+y^2+1-x^2-y^2 = 1 \ .$$

Also ist

$$\iint\limits_S (g \bullet n)\,\mathrm{d}O = \iint\limits_{S_1} (g \bullet n)\,\mathrm{d}O = \iint\limits_{S_1} 1\,\mathrm{d}O = F(S_1)$$

der Flächeninhalt des Flächenstücks S_1,

$$F(S_1) = \iint\limits_V \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_V (1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ .$$

In Polarkoordinaten berechnet sich dies als

$$F(S_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (1-r^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}[-(1-r^2)^{\frac{1}{2}}]_0^1 = \frac{\pi}{2} \ .$$

Insgesamt ist

$$\iint\limits_S (g \bullet n)\,\mathrm{d}O = F(S_1) = \frac{\pi}{2} \ .$$

Zweite Lösung mit dem Integralsatz von Gauß.
Es ist $(\operatorname{div} g)(x,y,z) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1+1+1 = 3$. Nach dem Integralsatz von Gauß ist also

$$\iint\limits_S (g \bullet n)\,\mathrm{d}O = \iiint\limits_B (\operatorname{div} g)(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3\iiint\limits_B 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

das 3-fache Volumen von B. Das Volumen $\mathrm{vol}(B)$ von B errechnet sich durch Integration über die Viertelkreisfläche V als

$$\mathrm{vol}(B) = \iint\limits_V \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\ .$$

In Polarkoordinaten ist dies

$$\mathrm{vol}(B) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} \cdot r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{3}(1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\ .$$

Insgesamt ist also

$$\iint\limits_S (g \bullet n)\, \mathrm{d}O = 3 \cdot \mathrm{vol}(B) = \frac{\pi}{2}\ .$$

Aufgabe 4: *(12 Punkte)*
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x - (2k-1)\pi & \text{für} \quad x \in [(2k-1)\pi, 2k\pi[\quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z} \\ \pi & \text{für} \quad x \in [2k\pi, (2k+1)\pi[\quad \text{und} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie ihre Fourier-Koeffizienten a_0 sowie a_m und b_m für $m \in \mathbb{N}$.

(b) Gegen welchen Wert konvergiert die Fourier-Reihe von f an der Stelle $x_0 = \pi$?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
(a)

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (x+\pi)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \pi\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-\pi}^{0} + 2\pi \\ &= -\frac{\pi^2}{2\pi} + 2\pi = \frac{3}{2}\pi\,. \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Tatsache, dass $\sin(m\pi) = 0$ für $m \in \mathbb{N}$, erhält man mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(mx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (x+\pi)\cos(mx)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \pi\cos(mx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos(mx)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi\cos(mx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[x\cdot\tfrac{1}{m}\sin(mx)\right]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\tfrac{1}{m}\sin(mx)\,\mathrm{d}x\right) + \int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\tfrac{1}{m^2}\cos(mx)\right]_{-\pi}^{0} + \left[\tfrac{1}{m}\sin(mx)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\tfrac{1}{m^2} - (-1)^m\tfrac{1}{m^2}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{m^2\pi} & \text{für } m \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } m \text{ gerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich

$$
\begin{aligned}
b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(mx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (x+\pi)\sin(mx)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \pi\sin(mx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin(mx)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi\sin(mx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-x\cdot\tfrac{1}{m}\cos(mx)\right]_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0}\tfrac{1}{m}\cos(mx)\,\mathrm{d}x\right) + \int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\tfrac{1}{m}x\cos(mx) + \tfrac{1}{m^2}\sin(mx)\right]_{-\pi}^{0} - \left[\tfrac{1}{m}\cos(mx)\right]_{-\pi}^{\pi}\\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\left(-\tfrac{1}{m}(-\pi)\right)(-1)^m\right)\\
&= -(-1)^m\frac{1}{m}\,.
\end{aligned}
$$

(b) An der Stelle π konvergiert die Fourierreihe gegen

$$
\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\pi+0} f(x) + \lim_{x\to\pi-0} f(x)\right) = \frac{1}{2}(0+\pi) = \frac{\pi}{2}\,.
$$