Lösungen zur Klausur

für mach, umw, fmt, bau, immo, tema, und zugehörige Technikpädagogik

Aufgabe 1: *(25 Punkte)*
Gegeben ist das folgende Differentialgleichungssystem:

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} -e^x \\ e^x \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie den Lösungsraum.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Zunächst wird eine Lösung f des homogenen Differentialgleichungssystems mit der Anfangsbedingung $f(0) = e_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ bestimmt. Es ist

$$A(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A^2(e_1) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren e_1 und $A(e_1)$ sind linear unabhängig, jedoch ist $A^2(e_1)$ von ihnen linear abhängig; es ist nämlich

$$A^2(e_1) - 4A(e_1) + 4e_1 = 0 .$$

Die beiden Komponenten f_1, f_2 der gesuchten Lösung f des homogenen Systems erfüllen also die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' - 4y' + 4y = 0; \tag{1}$$

die Anfangsbedingungen ergeben sich aus

$$f(0) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f'(0) = A(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das zugehörige Polynom ist

$$p(X) = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2.$$

(Man hätte es auch als charakteristisches Polynom von A gewinnen können.) Es hat 2 als doppelte Nullstelle; ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (1) besteht also aus den Funktionen

$$e^{2x}, \qquad xe^{2x}$$

mit den Ableitungen

$$2e^{2x}, \qquad (1 + 2x)e^{2x}.$$

Die Komponenten $f_1(x)$ bzw. $f_2(x)$ der gesuchten Lösung sind demnach Linearkombinationen $r_1e^{2x} + r_2xe^{2x}$, wobei r_1 und r_2 das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lösen (mit der Wronski-Matrix des gegebenen Fundamentalsystems an der Stelle $x = 0$ als Koeffizientenmatrix). Es ergibt sich

$$r_1 = 1,\, r_2 = -1 \quad \text{bzw.} \quad r_1 = 0,\, r_2 = 1.$$

Die gesuchte Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems ist somit

$$f(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} - xe^{2x} \\ xe^{2x} \end{pmatrix}.$$

Weitere Lösungen sind

$$f'(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} - 2xe^{2x} \\ e^{2x} + 2xe^{2x} \end{pmatrix}$$

sowie

$$g(x) = f'(x) - f(x) = \begin{pmatrix} -xe^{2x} \\ e^{2x} + xe^{2x} \end{pmatrix}.$$

Wegen $f(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $g(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ bilden f und g ein Fundamentalsystem von Lösungen des homogenen Differentialgleichungssystems mit zugehöriger Wronski-Matrix

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} - xe^{2x} & -xe^{2x} \\ xe^{2x} & e^{2x} + xe^{2x} \end{pmatrix}.$$

Das Fundamentalsystem ist normiert, d.h. $M(0)$ ist die Einheitsmatrix; folglich ist $M(x)^{-1} = M(-x)$.
(Falls $M(x)$ die Wronski-Matrix eines nicht normierten Fundamentalsystems ist, ist allgemeiner $M(x)^{-1} = M(0)^{-1}M(-x)M(0)^{-1}$.)

Zur Gewinnung einer partikulären Lösung $\hat{f}_p$ des inhomogenen Differentialgleichungssystems macht man gemäß dem Prinzip der Variation der Konstanten den Ansatz

$$\hat{f}_p(x) = c_1(x)f(x) + c_2(x)g(x)$$

mit differenzierbaren Funktionen c_1, c_2, deren Ableitungen dem Gleichungssystem

$$M(x) \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^x \\ e^x \end{pmatrix}$$

genügen. Es ist also

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = M(x)^{-1} \begin{pmatrix} -e^x \\ e^x \end{pmatrix} = M(-x) \begin{pmatrix} -e^x \\ e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix},$$

so dass man $c_1(x) = e^{-x}$, $c_2(x) = -e^{-x}$ wählen kann. Damit erhält man als partikuläre Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\hat{f}_p(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ -e^x \end{pmatrix}.$$

(Mit der Beobachtung, dass $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 2 ist, hätte man diese auch mit dem Ansatz $\hat{f}_p(x) = c(x)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ durch Lösen der Differentialgleichung $c'(x) = 2c(x) - e^x$ gewinnen können.)

Der Lösungsraum des gegebenen inhomogenen Differentialgleichungssystems besteht aus den Funktionen

$$r_1 f + r_2 g + \hat{f}_p$$

mit $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2: *(10 Punkte)*
In der x-y-Ebene ist die Menge $G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq -y^2 + 4y - 3\}$ gegeben. Bestimmen Sie das Volumen des Drehkörpers, der durch Rotation von G um die x-Achse entsteht.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
Es ist $-y^2 + 4y - 3 = 0$ genau für $y = 1$ oder $y = 3$, also $-y^2 + 4y - 3 \geq 0$ genau für $y \in [1,3]$.

Der Drehkörper lässt sich also mit der Funktion $r\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon (y,z) \mapsto \sqrt{y^2+z^2}$ beschreiben als

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 1 \leq r(y,z) \leq 3, 0 \leq x \leq -(r(y,z))^2 + 4r(y,z) - 3\}\,.$$

Sein Volumen erhält man durch Integration über den Kreisring

$$B = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq y^2 + z^2 \leq 9\}$$

als

$$V = \iint_B (-(r(y,z))^2 + 4r(y,z) - 3)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten (r,φ) in der y-z-Ebene (mit Funktionaldeterminante r) wird dies

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_1^3 (-r^2 + 4r - 3) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{4}r^4 + \frac{4}{3}r^3 - \frac{3}{2}r^2 \right]_{r=1}^3 \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{8}{3}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{16}{3}\pi\,. \end{aligned}$$

(Als Alternative kann man mit den üblichen Formeln für Drehkörper das Volumen auch bestimmen als Differenz der Volumina der zwei Drehkörper, deren äußere Konturen folgendermaßen beschrieben sind:

- durch die Gleichung $y = 2 + \sqrt{1-x}$ beziehungsweise $y = 2 - \sqrt{1-x}$ für $x \in [0,1]$, welche man aus $x = -y^2 + 4y - 3$ gewinnt
- oder durch die beiden Kurven, die durch $t \mapsto (-t^2 + 4t - 3, t)$ für $t \in [1,2]$ beziehungsweise für $t \in [2,3]$ parametrisiert sind.)

Aufgabe 3: *(15 Punkte)*
Gegeben ist das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

und die geschlossene Fläche

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2 \leq 1\,,\ z = 2(1-(x^2+y^2))\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2 \leq 1\,,\ z = 0\}.$$

Berechnen Sie den Fluss von g durch S

$$\iint_S (g \bullet n)\,\mathrm{d}O\,,$$

wobei n der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor der Fläche S ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
Sei $\bar{J}$ der von S berandete Körper. Mit dem Satz von Gauß ist

$$\iint_S (g \bullet n)\,\mathrm{d}O = \iiint_{\bar{J}} \operatorname{div} g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\bar{J}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =: V$$

das Volumen von $\bar{J}$. Dieses Volumen lässt sich berechnen durch Integration über die Einheitskreisscheibe

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

als

$$V = \iint_D 2(1-(x^2+y^2))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Übergang zu Polarkoordinaten liefert

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi\left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^1 = \pi\,.$$

(Alternativ kann man den Fluss

$$\iint_S (g \bullet n)\,\mathrm{d}O$$

direkt berechnen. Der Fluss durch den Boden ist 0, da das Vektorfeld g dort 0 ist. Der Fluss durch dem oberen Teil von S ist

$$\iint_D \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 2(1-(x^2+y^2)) \end{smallmatrix}\right) \bullet \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -4x \end{smallmatrix}\right) \times \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -4y \end{smallmatrix}\right)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D 2(1-(x^2+y^2))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

dies führt auf dasselbe Integral wie oben. Der Normalenvektor

$$\tilde{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4y \end{pmatrix}$$

wird dabei *nicht* auf Einheitslänge normiert; dies trägt dem Verzerrungsfaktor der Parametrisierung Rechnung.)

Aufgabe 4: *(10 Punkte)*
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch $f(x) = (x - 2\pi k)^2 - \pi^2$ für $x \in [(2k-1)\pi, (2k+1)\pi[$ und $k \in \mathbb{Z}$ gegeben.
Berechnen Sie ihre Fourier-Koeffizienten a_0 sowie a_m und b_m für $m \in \mathbb{N}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - \pi^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{3} x^3 - \pi^2 x \right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{4}{3}\pi^2 \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Tatsache, dass $\sin(m\pi) = 0$ für $m \in \mathbb{N}$, erhält man mit zweimaliger partieller Integration:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(mx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - \pi^2) \cos(mx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[(x^2 - \pi^2) \cdot \tfrac{1}{m} \sin(mx) \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \cdot \tfrac{1}{m} \sin(mx)\,\mathrm{d}x \right) \\ &= -\frac{2}{m\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(mx)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{m\pi} \left(\left[-\tfrac{1}{m} x \cos(mx) \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{m} \cos(mx)\,\mathrm{d}x \right) \\ &= -\frac{2}{m\pi} \left(-\tfrac{2\pi}{m} \cos(m\pi) + \tfrac{1}{m} \left[\tfrac{1}{m} \sin(mx) \right]_{-\pi}^{\pi} \right) \\ &= \frac{4}{m^2} \cos(m\pi) \\ &= (-1)^m \cdot \frac{4}{m^2} \end{aligned}$$

Für $-\pi < x < \pi$ ist

$$f(-x) = x^2 - \pi^2 = f(x)$$

und wegen

$$f(\pi) = (\pi - 2\pi)^2 - \pi^2 = 0 = (-\pi)^2 - \pi^2 = f(-\pi)$$

gilt dies auch für $x = \pm\pi$. Also ist f auf $[-\pi, \pi]$ eine gerade Funktion und $f(x) \cdot \sin(mx)$ eine ungerade Funktion, da $\sin(mx)$ für $m \in \mathbb{N}$ ungerade ist. Deshalb gilt:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(mx)\,\mathrm{d}x = 0$$

Alternativ erhält man nach zweimaliger partieller Integration die Stammfunktion:

$$\frac{1}{\pi}\int (x^2-\pi^2)\cdot\sin(mx)\,\mathrm{d}x =$$
$$\left[-\frac{1}{m^3\pi}\big(m^2x^2\cos(mx)-2mx\sin(mx)-2\cos(mx)-\pi^2m^2\cos(mx)\big)\right]$$

Einsetzen der Integrationsgrenzen führt dann ebenfalls zum Ziel.