Prüfung HM III el, kyb Teil 1

Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung

3.9.2007

Name	**Vorname**	**Matr.-nummer**	**Fach**

Anmerkungen zur Korrektur:

1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3

1	2	3	Summe	Note

Aufgabe 1 (12 Punkte)

1.1 (2 Punkte) Formulieren Sie den Integralsatz von Cauchy (Hauptsatz der Funktionentheorie).

1.2 (6 Punkte) Berechnen Sie folgende Wegintegrale in $\mathbb{C}$:

$$\int_\gamma \frac{e^{\sin(z)}}{\cos(z)}\,dz\,, \qquad \int_\gamma \frac{1}{|z|}\,dz\,, \qquad \int_\gamma \frac{e^{\sin(z)}}{z}\,dz\,,$$

wobei γ der einfach durchlaufene, an 0 zentrierete, positiv orientierte Einheitskreis ist. Auf welche dieser Integrale läßt sich der Integralsatz von Cauchy anwenden?

1.3 (4 Punkte) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2-4x+5}\,dx\,.$$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

2.1 (2 Punkte) Formulieren Sie das Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen inklusive der Abschätzung für den Reihenrest.

2.2 (3 Punkte) Berechnen Sie $1/e$ bis auf zwei Nachkommastellen exakt mit Hilfe einer Reihe und obiger Abschätzung.

2.3 (3 Punkte) Gegeben Sei die Funktion

$$f(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{\sqrt{1+t^2x}}{t}\,dt, \qquad\qquad x \in [1,2]\,.$$

Berechnen Sie die Ableitung von f in der Variablen x.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Ein beschränkter Körper $\mathcal{K}_\alpha$ im $\mathbb{R}^3$ sei für beliebiges $\alpha > 0$ berandet durch die Kreisscheibe

$$\mathcal{S} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2 \le 1,\; z=0\big\}$$

und den Graphen

$$\mathcal{G}_\alpha = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2 \le 1,\; z = \alpha\big(1-\big(x^2+y^2\big)\big)\big\}$$

der Funktion $f_\alpha(x,y) = \alpha(1-(x^2+y^2))$ über der Kreisscheibe $\mathcal{S}$. Der nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor auf der (stückweise regulären) Oberfläche von $\mathcal{K}_\alpha$ sei durch $\vec{\mathbf{n}}$ bezeichnet. Man bestimme nun zum Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

3.1 (5 Punkte)

a) den Fluss $\iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{v}\cdot\vec{\mathbf{n}}\;dF$ durch die Kreisscheibe $\mathcal{S}$ und

b) den Fluss $\iint\limits_{\mathcal{G}_\alpha} \vec{v}\cdot\vec{\mathbf{n}}\;dF$ durch den Graphen $\mathcal{G}_\alpha$.

3.2 (1 Punkt) Für welches $\alpha > 0$ gilt

$$\iiint\limits_{\mathcal{K}(\alpha)} \operatorname{div}(\vec{v})\;dV \;=\; \pi \qquad ?$$

3.3 (4 Punkte) Man berechne das Dreifachintegral

$$h_\alpha = \iiint\limits_{\mathcal{K}_\alpha} z\;dV\;.$$

Wo liegt der geometrische Schwerpunkt $\vec{S} \in \mathbb{R}^3$ des Körpers $\mathcal{K}_\alpha$, wenn die Massendichteverteilung konstant ist?