Aufgabe 6 (10 Punkte)

6.1 (4 Punkte) Gegeben Sei das lineare Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y,z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Kreuzen Sie an, welche notwendigen Bedingungen erfüllt sein müssen, damit $\vec{F}$ ein Gradienten- bzw. ein Wirbelfeld ist.

6.1.a (1 P) $\det(A) = 0$

6.1.b (1 P) $A = A^t$

6.1.c (1 P) A ist orthogonal

6.1.d (1 P) $\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{tr}(A) = 0$

6.2 (2 Punkte) Berechnen Sie unter der Bedingung, daß $\vec{F}$ ein Gradientenfeld ist, ein Potential U von $\vec{F}$, so daß

$$\operatorname{grad} U(x,y,z) = \vec{F}(x,y,z)$$

gilt.

6.3 (4 Punkte) Verifizieren Sie, daß

$$\vec{G}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yze^{xz} + \cos(yz) + \cos(x) \\ e^{xz} - xz\sin(yz) \\ xy(e^{xz} - \sin(yz)) \end{pmatrix}$$

ein Gradientenfeld ist und berechnen Sie das Potential V von $\vec{G}$ mit $V(\pi, 0, 0) = 0$.

Prüfung HM III el, kyb Teil 2

Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung

4.9.2007

Name	**Vorname**	**Matr.-nummer**	**Fach**

Anmerkungen zur Korrektur:

4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	5.3	6.1	6.2	6.3

4	5	6	Summe	Note

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 4.1 ein:

Aufgabe 4.1		Ja	Nein
4.1.a	f besitzt im Punkt $z = -\mathrm{i}$ eine hebbare Singularität	☐	☐
4.1.b	f besitzt im Punkt $z = 0$ eine wesentliche Singularität	☐	☐
4.1.c	f besitzt im Punkt $z = \mathrm{i}$ eine einfache Polstelle	☐	☐
4.1.d	f besitzt im Punkt $z = 1$ eine zweifache Polstelle	☐	☐

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 6.1 ein:

Aufgabe 6.1		Gradientenfeld	Wirbelfeld
6.1.a	$\det(A) = 0$	☐	☐
6.1.b	$A = A^t$	☐	☐
6.1.c	A ist orthogonal	☐	☐
6.1.d	$\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{tr}(A) = 0$	☐	☐

Aufgabe 4 (10 Punkte)

4.1 (4 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$\frac{\sin(1/z)\cos(z-1)\sinh(z+\mathrm{i})}{(z^4-1)}\,.$$

Kreuzen Sie auf der zweiten Seite an, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind.

4.1.a (1 P) f besitzt im Punkt $z = -\mathrm{i}$ eine hebbare Singularität

4.1.b (1 P) f besitzt im Punkt $z = 0$ eine wesentliche Singularität

4.1.c (1 P) f besitzt im Punkt $z = \mathrm{i}$ eine einfache Polstelle

4.1.d (1 P) f besitzt im Punkt $z = 1$ eine zweifache Polstelle

4.2 (3 Punkte) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx\,.$$

4.3 (3 Punkte) Berechnen Sie die Laurent-Reihenentwicklung der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + \mathrm{i}z}$$

die im Kreisring zwischen den Polen konvergiert.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

5.1 (2 Punkte) Seien $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Formulieren Sie die Bedingungen, unter dessen die Differentialgleichung

$$a(x)\,y'(x) + b(x) = 0$$

exakt ist.

5.2 (4 Punkte) Berechnen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(x) = x\sqrt[5]{y^2(x)}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

5.3 (4 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + \sin x y(x) = 2x\,e^{\cos x}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$