Prüfung Vordiplom Mathematik für Physiker, Teil 1

Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung

3.9.2007

Name	Vorname	Matr.-nummer

Anmerkungen zur Korrektur:

1.1	1.2	1.3	**Aufgabe 1**	2.1	2.2	2.3	**Aufgabe 2**

3.1	3.2	3.3	**Aufgabe 3**	4.1	4.2	4.3	**Aufgabe 4**

1	2	3	4	Summe

Aufgabe 3 (12 Punkte)

3.1 (2 Punkte) Formulieren Sie den Integralsatz von Cauchy (Hauptsatz der Funktionentheorie).

3.2 (6 Punkte) Berechnen Sie folgende Wegintegrale in $\mathbb{C}$:

$$\int_\gamma \frac{e^{\sin(z)}}{\cos(z)}\,dz\,, \qquad \int_\gamma \frac{1}{|z|}\,dz\,, \qquad \int_\gamma \frac{e^{\sin(z)}}{z}\,dz\,,$$

wobei γ der einfach durchlaufene, an 0 zentrierete, positiv orientierte Einheitskreis ist. Auf welche dieser Integrale läßt sich der Integralsatz von Cauchy anwenden?

3.3 (4 Punkte) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2-4x+5}\,dx\,.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Ein beschränkter Körper $\mathcal{K}_\alpha$ im $\mathbb{R}^3$ sei für beliebiges $\alpha > 0$ berandet durch die Kreisscheibe

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2\le 1,\; z=0\right\}$$

und den Graphen

$$\mathcal{G}_\alpha = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2\le 1,\; z=\alpha\left(1-\left(x^2+y^2\right)\right)\right\}$$

der Funktion $f_\alpha(x,y)=\alpha(1-(x^2+y^2))$ über der Kreisscheibe $\mathcal{S}$. Der nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor auf der (stückweise regulären) Oberfläche von $\mathcal{K}_\alpha$ sei durch $\vec{\mathbf{n}}$ bezeichnet. Man bestimme nun zum Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

4.1 (5 Punkte)

a) den Fluss $\iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{v}\cdot\vec{\mathbf{n}}\;dF$ durch die Kreisscheibe $\mathcal{S}$ und

b) den Fluss $\iint\limits_{\mathcal{G}_\alpha} \vec{v}\cdot\vec{\mathbf{n}}\;dF$ durch den Graphen $\mathcal{G}_\alpha$.

4.2 (1 Punkt) Für welches $\alpha > 0$ gilt

$$\iiint\limits_{\mathcal{K}(\alpha)} \operatorname{div}(\vec{v})\;dV \;=\; \pi \qquad ?$$

4.3 (4 Punkte) Man berechne das Dreifachintegral

$$h_\alpha = \iiint\limits_{\mathcal{K}_\alpha} z\;dV\,.$$

Wo liegt der geometrische Schwerpunkt $\vec{S}\in\mathbb{R}^3$ des Körpers $\mathcal{K}_\alpha$, wenn die Massendichteverteilung konstant ist?

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2\mathrm{i} & -2 \\ 2\mathrm{i} & -2 & \mathrm{i} \\ -2 & \mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} & -1 \\ \mathrm{i} & 0 & \mathrm{i}t \\ -1 & -\mathrm{i}t & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.1 (6 Punkte) Kreuzen Sie in der Tabelle auf der zweiten Seite an, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind.

1.1.a (1 P) A ist hermitesch

1.1.b (1 P) A ist unitär

1.1.c (1 P) A ist diagonalisierbar

1.1.d (1 P) $\exists t \in \mathbb{R} : B(t)$ ist invertierbar

1.1.e (1 P) $B(1)$ hat nur reelle Eigenwerte

1.1.f (1 P) $\exists t \in \mathbb{R} : B(t)$ ist diagonalisierbar

1.2 (4 Punkte) Bestimme Sie die folgenden Größen und tragen Sie diese in die Tabelle auf Seite zwei ein. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

1.2.a (1 P) Das charakteristische Polynom von C

1.2.b (1 P) Die Eigenwerte von C sowie ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

1.2.c (1 P) $\det\left(C^3 - 2C^tC\right)$

1.2.d (1 P) $\operatorname{Spur}\left(CB(t)C^{-1} - C\right) = \operatorname{tr}\left(CB(t)C^{-1} - C\right)$

1.3 (5 Punkte Gegeben seien die Matrizen H_n für $n \geq 1$ mit

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad H_{n+1} = \begin{pmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{pmatrix}, \ (n \geq 1).$$

1.3.a (2 P) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von H_1.

1.3.b (2 P) Zeigen Sie, daß für alle $n \geq 1$ die Matrizen $\frac{1}{\sqrt{2^n}}H_n$ orthogonal sind.

1.3.c (1 P) Zeigen Sie, daß für alle $n \geq 1$ alle Eigenwerte von H_n vom Betrag $\sqrt{2^n}$ sind und daß weiterhin $\det(H_n) = \pm 2^{n2^{n-1}}$ gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben sei ein reeller Parameter κ und die Matrix

$$A(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \kappa & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.1 (3 Punkte) Untersuchen Sie mit Hilfe einer geeigneten Fallunterscheidung die Lösbarkeit in $x \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems

$$A(\kappa)x = y$$

in Abhängigkeit von $\kappa \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems. Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich!

2.2 (3 Punkte) Zeigen Sie

$$A^{2n-1}(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \kappa^{2n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{2n}(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.3 (4 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A^n(\kappa)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und beliebige $\kappa \in \mathbb{R}$.

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 1.1 ein:

Aufgabe 1.1		Ja	Nein
1.1.a	A ist hermitesch	☐	☐
1.1.b	A ist unitär	☐	☐
1.1.c	A ist diagonalisierbar	☐	☐
1.1.d	$\exists t \in \mathbb{R} : B(t)$ ist invertierbar	☐	☐
1.1.e	$B(1)$ hat nur reelle Eigenwerte	☐	☐
1.1.f	$\exists t \in \mathbb{R} : B(t)$ ist diagonalisierbar	☐	☐

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgabe 1.2 ein:

Aufgabe 1.2		Ergebnis
1.2.a	Charakteristisches Polynom von C	
1.2.b	Eigenwerte von C	
	Algebraische Vielfachheiten	
	Geometrische Vielfachheiten	
1.2.c	$\det\left(C^3 - 2C^tC\right)$	
1.2.d	$\operatorname{Spur}\left(CB(t)C^{-1} - C\right) =$ $\operatorname{tr}\left(CB(t)C^{-1} - C\right)$	