7.2 (4 Punkte) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 + 3z^2 = 3\,.$$

7.3 (2 Punkte) Sei $f(x, y, z)$ wie oben gegeben. Für welche (x, y, z) läßt sich die Variable $z = z(x, y)$ aus der Gleichung

$$f(x, y, z(x, y)) = 2$$

lokal nach x und y auflösen?

Aufgabe 8 (10 Punkte)

8.1 (2 Punkte) Seien $a, b : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Formulieren Sie die Bedingungen, unter dessen die Differentialgleichung

$$a(x, y)\, y'(x) + b(x, y) = 0$$

exakt ist.

8.2 (4 Punkte) Berechnen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(x) = x\sqrt[5]{y^2(x)}\,, \quad y(0) = 0, \qquad x \in [0, \infty)\,.$$

8.3 (4 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + y(x)\, \sin x = 2x\, e^{\cos x}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Prüfung Vordiplom Mathematik für Physiker, Teil 2

Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung

4.9.2007

Name	**Vorname**	**Matr.-nummer**

Anmerkungen zur Korrektur:

5.1	5.2	5.3	**Aufgabe 5**	6.1	6.2	6.3	**Aufgabe 6**
7.1	7.2	7.3	**Aufgabe 7**	8.1	8.2	8.3	**Aufgabe 8**

5	6	7	8	Summe	Total

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 5.3 ein:

Aufgabe 5.3		Ergebnis
5.3.a	$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1-x}{x^2}$	
5.3.b	$\lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(1+x)}{2x^2}$	

Aufgabe 5 (16 Punkte)

5.1 (8 Punkte)

5.1.a (2 P) Formulieren Sie zwei verschiedenen Kriterien für Konvergenz einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

5.1.b (6 P) Verwenden Sie ein geeignetes Konvergenzkriterium und entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen absolut bzw. bedingt konvergieren:

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{n!}\,, \quad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{100}\, e^{-n\ln n}\,, \quad (iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\ \sin(n\pi + \frac{\pi}{4})}{1+n}\,.$$

5.2 (4 Punkte)

5.2.a (2 P) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n\, z^{n-1}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Berechnen Sie $S(z)$ für alle z mit $|z| < R$.

5.2.b (2 P) Geben Sie außerdem die Taylorreihe für $S_1(z) = dS(z)/dz$ um den Punkt $z_0 = 0$ an.

5.3 (4 Punkte) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte und tragen Sie Ihre Antworten in die Tabelle auf Seite 2 ein. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

$$a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2}\,, \qquad b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{2x^2}\,.$$

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x} \qquad x \in D\,.$$

6.1 (3 Punkte) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D von f und berechnen Sie f' und f''.

6.2 (3 Punkte) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von f. Skizzieren Sie den Graphen von f.

6.3 (2 Punkte) Geben Sie eine Stammfunktion von f an.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Die Funktion $f : T \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x,y,z) := x + 2y - x^2 - y^2 - z^2\,,$$

wobei

$$T := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + 3z^2 \le 3\}\,.$$

7.1 (4 Punkte)

7.1.a (2P) Entwickeln Sie die Funktion f um den Punkt $(1,1,0) \in T$ in eine Taylorreihe.

7.1.b (2P) Finden Sie alle kritischen Punkte von f im Inneren von T. Entscheiden Sie, ob f in diesen Punkten jeweils einen lokalen Extremwert annimmt.