1. Klausur der Diplomvorprüfung

für **aer, autip, verf, wewi**

Aufgabe 1 (*15 Punkte*)

(a) Wir geben ein Normalenvektorfeld $\vec{S}$ auf der Oberfläche $\mathbb{T}$ an. Wir setzen dazu $r = 1$. Dann gilt für die partiellen Ableitungen von f (mit $r = 1$):

$$f_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad f_\varphi = \begin{pmatrix} -(\ 2+\cos\theta\ )\sin\varphi \\ (2+\cos\theta\ )\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Vektorkreuzprodukt von f_θ und f_φ ergibt einen nicht normierten Normalenvektor für die Oberfläche $\mathbb{T}$ im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{S} := f_\theta \times f_\varphi = \begin{pmatrix} -\cos\theta(\ 2+\cos\theta\ )\cos\varphi \\ -\cos\theta(2+\cos\theta\ )\sin\varphi \\ -\sin\theta(\ 2+\cos\theta\ ) \end{pmatrix}.$$

Der Normalenvektor $\vec{S}$ ist ins Innere des Körpers $\mathbb{V}$ gerichtet!

(b) Für den Fluss gilt:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{T}} \vec{W}\cdot\mathbf{\vec{n}}\; dF &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \vec{W}\cdot(-\vec{S})\; d\theta d\varphi \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} (2+\cos\theta\ )\cos\varphi \\ (2+\cos\theta\ )\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos\theta(\ 2+\cos\theta\ )\cos\varphi \\ -\cos\theta(2+\cos\theta\ )\sin\varphi \\ -\sin\theta(\ 2+\cos\theta\ ) \end{pmatrix} d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\theta(\ 2+\cos\theta\ )^2\; d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} 4\cos^2\theta\; d\theta d\varphi.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass $\cos(x-\pi/2)$ und $\cos^3(x-\pi/2)$ ungerade Funktionen sind. Mit partieller Integration finden wir: $\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\; d\theta = \pi + \frac{1}{2}[\sin\theta\cos\theta]_0^{2\pi}$. Also erhalten wir für den Fluss:

$$\iint_{\mathbb{T}} \vec{W}\cdot\mathbf{\vec{n}}\; dF = 4\cdot 2\pi\cdot\pi = 8\pi^2\ .$$

(c) Wir berechnen zunächst die Funktionaldeterminante ρ. Es ist

$$\rho = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi(2+r\cos\theta) \\ \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & -\cos\varphi(2+r\cos\theta) \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = -r(2+r\cos\theta)\ .$$

Nun berechnen wir das Volumen durch dreifache Integration. Es ist

$$\begin{aligned}
Vol &= \iiint_{\mathbb{V}} 1 \cdot dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\rho| d\varphi d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(2 + r\cos\theta) d\varphi d\theta dr = 2\pi \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(2 + r\cos\theta) d\theta dr \\
&= 2\pi \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r d\theta dr = 8\pi^2 \int_0^1 r dr \quad = \quad 4\pi^2
\end{aligned}$$

Man kann hier alternativ den Divergenzsatz (von Gauß) benutzen, um mit dem Fluss-Integral das Volumen zu berchnen. Denn es gilt $\operatorname{div}(\vec{W}) = 2$ auf $\mathbb{R}^3$ und dann

$$\iint_{\mathbb{T}} \vec{W} \cdot \vec{\mathbf{n}} \, dF = \iiint_{\mathbb{V}} \operatorname{div}(\vec{W}) dV = \iiint_{\mathbb{V}} 2dV = 2 \cdot Vol \; .$$

Mit $\iint_{\mathbb{T}} \vec{W} \cdot \vec{\mathbf{n}} \, dF = 8\pi^2$ erhalten wir also wiederum $Vol = 4\pi^2$.

Aufgabe 2 (*12 Punkte*)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$3y''(x) - 10y'(x) + 3y(x) = p(x)\,.$$

(a) Für das zugehörige charakteristische Polynom erhält man

$$3\lambda^2 - 10\lambda + 3 = (3\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = 1/3$ und $\lambda_2 = 3$. Damit ergibt sich für die llgemeine reelle Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1 e^{x/3} + c_2 e^{3x}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu erhalten, wählt man den Anstaz vom Typ der rechten Seite (einfache Resonanz)

$$\begin{aligned} y_{\text{sp}}(x) &= axe^{3x} \\ y'_{\text{sp}}(x) &= a(3x+1)e^{3x} \\ y''_{\text{sp}}(x) &= a(9x+6)e^{3x} \end{aligned}$$

und nach Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man

$$3a(9x+6)e^{3x} - 10a(3x+1)e^{3x} + 3axe^{3x} = 8e^{3x}$$

sowie nach Koeffizientenvergleich $a = 1$, d. h. $y_{\text{sp}}(x) = xe^{3x}$. Damit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$)

$$y_{\text{allg}}(x) = y_{\text{sp}}(x) + y_{\text{hom}}(x) = xe^{3x} + c_1 e^{x/3} + c_2 e^{3x}\,.$$

(c) Man erhält

$$y'_{\text{allg}}(x) = (3x + 1 + 3c_2)e^{3x} + \frac{c_1}{3} e^{x/3}$$

und damit für das Anfangswertproblem die Gleichungen

$$\begin{aligned} \widetilde{y}(0) &= c_1 + c_2 = 2 \\ \widetilde{y}'(0) &= 1 + 3c_2 + \frac{c_1}{3} = 7 \end{aligned}$$

mit der Lösung $c_1 = 0,\ c_2 = 2$, d. h. $\widetilde{y}(x) = (2 + x)e^{3x}$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} \widetilde{y}(x) = 0$.

Aufgabe 3 (*8 Punkte*)

Geben Sie die Werte der folgenden komplexen Kurvenintegrale an, wobei der Weg C den am Ursprung zentrierten Einheitskreis einmal gegen den Uhrzeigersinn durchläuft.

$\int_C \frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}+2z}\,dz$	$\int_C \sinh(z)\cosh(z)\,dz$	$\int_C \frac{\cos(2z)}{z^3}\,dz$	$\int_C z\overline{z}\,dz$
-2π	0	$-4\pi\mathrm{i}$	0

Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

Es bezeichne $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die 2π-periodische Fortsetzung der reellen Funktion $h(x)=e^{2x}$, welche auf dem Intervall $[-\pi,\pi)$ gegeben ist.

(a) Man berechne die komplexen Fourierkoeffizienten $c_k(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\mathrm{i}kx}dx$:

$$c_0(f) = \boxed{\frac{\sinh(2\pi)}{2\pi}}$$

$$c_k(f) = \boxed{\frac{\sinh(2\pi)}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k\cdot(2+ik)}{4+k^2}}\quad,\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\,.$$

(b) Man gebe die reelle Fourierreihe $S_f(x) := \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\big(\,a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\,\big)$ an:

$$S_f(x) = \boxed{\frac{\sinh(2\pi)}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4+k^2}\big(\,4\cos(kx)-2k\sin(kx)\,\big)\right)}$$

(c) Konvergiert die Fourierreihe $S_f(x)$ auf $\mathbb{R}$ punktweise gegen f, ja oder nein? Antwort: nein!

(d) Konvergiert die Fourierreihe S_f auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f, ja oder nein? Antwort: nein!