2. Klausur der Diplomvorprüfung

für **aer**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Blätter DIN A4 eigenhändig beschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In den Aufgaben **1-2** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In den Aufgaben **3-4** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden deshalb auch nicht eingesammelt.
- Die Prüfungsergebnisse werden vorausssichtlich ab Vorlesungsbeginn vor dem Büro von Prof. Kühnel (Raum V57.7.348) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum 12. 11. 2007 bei Frau Maderer (Raum V57.7.346) einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*12 Punkte*)

Im Folgenden sollen alle Ergebnisse in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ angegeben werden, obwohl es durchaus praktisch sein kann in Polarkoordinaten zu rechnen!

(a) Es sei

$$f(z) := \frac{1}{z^3 + 1}$$

eine Funktion auf $\mathbb{C}$ mit Werten in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Man gebe sämtliche Polstellen der Funktion $f(z)$ an und berechne in jeder dieser Polstellen das Residuum von f.

(b) Es sei $C(r) := \{r \cdot e^{\mathrm{i}t} - \mathrm{i} \;:\; t \in [0, 2\pi]\}$ ein Weg in $\mathbb{C}$, welcher einen Kreis vom Radius r durchläuft. Man berechne das komplexe Kurvenintegral

$$\int_{C(r)} f(z) dz$$

für die Werte $r = 1$, $\frac{3}{2}$ und 2. Man beachte, dass $\cos(\pi/3) = 1/2$.

Aufgabe 2 (*13 Punkte*)

Es sei die Funktion $\tilde{f}(x)$ auf dem halboffenen Intervall $[-\pi, \pi)$ definiert durch:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} \pi + x & : \; x \in [-\pi, 0) \\ \pi - x & : \; x \in [0, \pi) \end{cases} \quad .$$

Mit $f(x)$ sei nun die direkte 2π-periodische Fortsetzung von $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}$ bezeichnet.

(a) Man berechne die komplexen Fourierkoeffizienten $c_k(f)$, $k \in \mathbb{Z}$, zur Funktion f.

(b) Man gebe die Fourierreihe S_f zur Funktion f in reeller Form an.

(c) Konvergiert die Fourierreihe S_f gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen die Funktion f?

(d) Berechnen Sie mittels S_f

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \, .$$

(e) Berechnen Sie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

mit Hilfe der Parseval-Identität von S_f.

Name: ______ **Matrikelnr:** ______ **Fach:** ______

Aufgabe 3 (*8 Punkte*)

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen im Allgemeinen wahr bzw. falsch sind.

Aussage	wahr	falsch
$\int\limits_{x=-1}^{1}\int\limits_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(x^2+y^2\right)\,dy\,dx = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{1} r^2\,dr\,d\varphi$		
Ist $B=[0,1]\times[0,1]$, dann gibt es zu jeder stetigen Funktion $f: B\to\mathbb{R}$ einen Punkt $(x^\star,y^\star)$ in B, mit $\iint\limits_B f(x,y)\,d(x,y) = f(x^\star,y^\star)\iint\limits_B 1\,d(x,y)$		
Ist S ein durch die Parameterdarstellung $\vec{\Phi}:\mathbb{R}^2\supseteqq D\to\mathbb{R}^3$ gegebenes reguläres Flächenstück mit der Normalenrichtung $\vec{n}=\vec{\Phi}_u\times\vec{\Phi}_v$ und $\vec{v}$ ein auf S stetiges Vektorfeld, dann gilt: $\iint\limits_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\,d\mathbf{O} = \iint\limits_D \operatorname{Det}\left(\vec{v},\vec{\Phi}_u,\vec{\Phi}_v\right)\,d(u,v).$		
Es sei $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leqq 1\}$ und $\vec{w}=(x,y,z)^{\mathrm{t}}$. Dann gilt: $3\,\mathrm{Vol}(B) = \iint\limits_{\partial B}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\,d\mathbf{O}$		

Aufgabe 4 (*12 Punkte*)

Es sei

$$A := \begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

eine reelle (3×3)-Matrix und

$$T_1(x) := \begin{pmatrix}0\\0\\e^{2x}\end{pmatrix}, \qquad T_2(x) := \begin{pmatrix}\cos x\\\sin x\\0\end{pmatrix}$$

seien zwei vektorwertige Funktionen. Dann sind durch $Y' = AY + T_i,\ i=1,2,$ zwei inhomogene Differentialgleichungssysteme gegeben. (**Bitte wenden!**)

(a) Welche der folgenden Tripel vektorwertiger Funktionen bilden ein komplexes Fundamentalsystem für den Lösungsraum der homogenen Differentialgleichung $Y' = AY$?

Tripel ist ein Fundamentalsystem ?	ja	nein
$e^{-\mathrm{i}x}\begin{pmatrix}1\\-\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}, \quad e^{\mathrm{i}x}\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}, \quad e^{2x}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$		
$\begin{pmatrix}2\cos x\\2\sin x\\2e^{2x}\end{pmatrix}, \quad e^{-\mathrm{i}x}\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\\3e^{2x}\end{pmatrix}, \quad e^{(2-\mathrm{i})x}\begin{pmatrix}e^{-2x}\\\mathrm{i}e^{-2x}\\e^{\mathrm{i}x}\end{pmatrix}$		
$e^{\mathrm{i}x}\begin{pmatrix}1\\-\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}, \quad e^{-\mathrm{i}x}\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}, \quad e^{2x}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$		

(b) Wie sieht eine allgemeine reelle Lösung der homogenen Differentialgleichung $Y' = AY$ aus?

Allgemeine reelle Lösung der homogenen DGL mit $a, b, c \in \mathbb{R}$?	ja	nein
$Y_h(x) = a\begin{pmatrix}\cos x\\\sin x\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\sin x\\\cos x\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\e^{2x}\end{pmatrix}$		
$Y_h(x) = a\begin{pmatrix}\cos x\\\sin x\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-\sin x\\\cos x\\-3e^{2x}\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}\cos x\\\sin x\\e^{2x}\end{pmatrix}$		
$Y_h(x) = a\begin{pmatrix}\cos x\\\sin x\\6e^{2x}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-\sin x\\\cos x\\-4e^{2x}\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}\sin x\\\cos x\\e^{2x}\end{pmatrix}$		

(c) Es sei $Z_1(x) = \begin{pmatrix}-\sin x\\\cos x\\e^{2x}\end{pmatrix}$, $Z_2(x) = \begin{pmatrix}2\sin x\\2\cos x\\xe^{2x}\end{pmatrix}$ und $Z_3(x) = \begin{pmatrix}-3\sin x\\3\cos x\\xe^{2x}\end{pmatrix}$.

Welche dieser vektorwertigen Funktionen Z_1, Z_2 und Z_3 stellen partikuläre Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung $Y' = AY + T_1$ dar? Antwort: ☐

(d) Gibt es eine Lösung $\tilde{Y}(x)$ zum DGL-System $Y' = AY + T_1$, welche die Bedingungen $\tilde{Y}(\pi) = \begin{pmatrix}1\\0\\\pi e^{2\pi}\end{pmatrix}$ und $\tilde{Y}(0) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ erfüllt? Antwort (ja oder nein?): ☐

(e) Tritt für die allgemeine reelle Lösung des inhomogemen Differentialgleichungssystems $Y' = AY + T_2$ der Resonanzfall auf? Antwort (ja oder nein?): ☐