2. Klausur der Diplomvorprüfung

für **aer**

Aufgabe 1 (*12 Punkte*)

Im Folgenden sollen alle Ergebnisse in der Form $x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ angegeben werden, obwohl es durchaus praktisch sein kann in Polarkoordinaten zu rechnen!

(a) Die Pole der Funktion $f(z) := \frac{1}{z^3+1}$ sind gegeben durch

$$p_1 = e^{\mathrm{i}\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\ , \qquad p_2 = e^{\mathrm{i}\pi} = -1\ , \qquad p_3 = e^{5\mathrm{i}\pi/3} = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\ .$$

Diese Pole sind alle 1. Ordnung.

Zur Berechnung der Residuen kann man folgende Beziehung benutzen

$$Res(f, p_i) \ = \ Res(\frac{1}{l'(z)}\frac{l'(z)}{l(z)}, p_i) = \frac{1}{l'(p_i)}\ , \quad i = 1, 2, 3\ ,$$

wobei wir $l(z) := \frac{1}{f(z)} = z^3 + 1$ setzen. Konkret haben wir dann hier mit $l'(z) = 3z^2$:

$$Res(f, p_i) = \frac{1}{3p_i^2}\ , \qquad i = 1, 2, 3\ ,$$

also

$$Res(f, p_1) = \frac{e^{-2\pi\mathrm{i}/3}}{3} = \frac{-1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}\ , \qquad Res(f, p_2) = \frac{e^{-2\pi\mathrm{i}}}{3} = \frac{1}{3}\ , \qquad Res(f, p_3) = \frac{e^{-10\pi\mathrm{i}/3}}{3} = \frac{-1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}\ .$$

(b) Der Kreis $C(1)$, welcher den Radius 1 hat und bei $-\mathrm{i}$ zentriert ist, umläuft gegen den Uhrzeigersinn nur die Polstelle $p_3 = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. Denn der Abstand zwischen i und p_3 ist kleiner als $\sqrt{(1/2)^2 + (1/2)^2} = 1/\sqrt{2}$. Der Abstand zwischen p_2 und i ist $\sqrt{2}$ also größer als 1. Außerdem ist $|Im(p_1 + \mathrm{i})|$ größer als 1. Das bedeutet für das komplexe Kurvenintegral:

$$\int_{C(6/5)} f(z)dz = Res(f, p_3) = \frac{2\pi\mathrm{i}}{3}e^{2\pi\mathrm{i}/3} = \frac{-\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi\mathrm{i}}{3}\ .$$

Der Kreis $C(3/2)$ umläuft nun p_3 und p_1, wie wir schon oben gezeigt haben. Er umläuft nicht p_1, da $|Im(\mathrm{i} + p_1)|$ bereits grösser als $3/2$ ist. Also ergibt sich

$$\int_{C(3/2)} f(z)dz = Res(f, p_3) + Res(f, p_2) = \frac{2\pi\mathrm{i}}{3}(\ e^{2\pi\mathrm{i}/3} + 1\ ) = \frac{-\pi}{\sqrt{3}} + \frac{\pi\mathrm{i}}{3}\ .$$

Der Kreis $C(2)$ umläuft alle Polstellen, da er den Einheitskreis um den Ursprung enthält. Dann ergibt sich

$$\int_{C(2)} f(z)dz = Res(f, p_3) + Res(f, p_2) + Res(f, p_1) = \frac{2\pi\mathrm{i}}{3}(e^{2\pi\mathrm{i}/3} + e^{-2\pi\mathrm{i}/3} + 1) = 0\ .$$

Aufgabe 2 (*13 Punkte*)

(a) Man erhält

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi + x)\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi - x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\pi x + \frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

und

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(\pi + x)e^{-\mathrm{i}kx}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi - x)e^{-\mathrm{i}kx}\,dx \\ &\overset{\text{part. Int.}}{=} \left[\frac{(\pi + x)\mathrm{i}}{2k\pi}\,e^{-\mathrm{i}kx}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{\mathrm{i}}{2k\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-\mathrm{i}kx}\,dx + \left[\frac{(\pi - x)\mathrm{i}}{2k\pi}\,e^{-\mathrm{i}kx}\right]_{0}^{\pi} + \frac{\mathrm{i}}{2k\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-\mathrm{i}kx}\,dx \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2k} + \left[\frac{1}{2k^2\pi}\,e^{-\mathrm{i}kx}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{\mathrm{i}}{2k} - \left[\frac{1}{2k^2\pi}\,e^{-\mathrm{i}kx}\right]_{0}^{\pi} \\ &= \frac{1-(-1)^k}{k^2\pi} \end{aligned}$$

für $k \neq 0$.

(b) Mit den Umrechnungsformeln erhält man

$$a_0 = 2c_0 = \pi$$

und für $k \neq 0$

$$\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k} = \frac{1-(-1)^k}{k^2\pi} + \frac{1-(-1)^{-k}}{(-k)^2\pi} = 2\,\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi} \\ b_k &= \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) = 0\,, \end{aligned}$$

d. h.

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^2}\,\cos(kx)\,.$$

(c) Da f stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, konvergiert S_f auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f.

(d) Es gilt für $k = 2m$ und $m > 0$ bzw. $k = 2m + 1$

$$a_{2m} = 0 \text{ bzw. } a_{2m+1} = \frac{4}{(2m+1)^2\pi}$$

sowie mit obigem

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos((2m+1)x)}{(2m+1)^2}$$

und damit folgt speziell für $x = 0$

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \,,$$

also

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \,.$$

(e) Mit der Parseval-Identität

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \|f\|_{2\pi}^2$$

erhält man für die linke Seite

$$\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

und für die rechte Seite

$$\|f\|_{2\pi}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} (\pi + x)^2 \, dx + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} (\pi - x)^2 \, dx = \left[\frac{(\pi + x)^3}{6\pi}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{(\pi - x)^3}{6\pi}\right]_{0}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

und damit insgesamt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^4}{96} \,.$$

Aufgabe 3 (*8 Punkte*)

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen im allgemeinen wahr bzw. falsch sind.

Aussage	wahr	falsch
$\displaystyle\int\limits_{x=-1}^{1}\int\limits_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(x^2+y^2\right)\,dy\,dx = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{1} r^2\,dr\,d\varphi$		$\times$
Ist $B=[0,1]\times[0,1]$, dann gibt es zu jeder stetigen Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ einen Punkt $(x^\star, y^\star)$ in B, mit $\displaystyle\iint\limits_B f(x,y)\,d(x,y) = f(x^\star,y^\star)\iint\limits_B 1\,d(x,y)$	$\times$	
Ist S ein durch die Parameterdarstellung $\vec{\Phi} : \mathbb{R}^2 \supseteqq D \to \mathbb{R}^3$ gegebenes reguläres Flächenstück mit der Normalenrichtung $\vec{n} = \vec{\Phi}_u \times \vec{\Phi}_v$ und $\vec{v}$ ein auf S stetiges Vektorfeld, dann gilt: $\displaystyle\iint\limits_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\,d\mathbf{O} = \iint\limits_D \operatorname{Det}\left(\vec{v},\vec{\Phi}_u,\vec{\Phi}_v\right)\,d(u,v).$		$\times$
Es sei $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leqq 1\right\}$ und $\vec{w}=(x,y,z)^{\mathrm{t}}$. Dann gilt: $3\,\mathrm{Vol}(B) = \displaystyle\iint\limits_{\partial B} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d\mathbf{O}$	$\times$	

Aufgabe 4 (*12 Punkte*)

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

eine reelle (3×3)-Matrix und

$$T_1(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix}, \qquad T_2(x) := \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \\ 0 \end{pmatrix}$$

seien zwei vektorwertige Funktionen. Dann sind durch $Y' = AY + T_i,\ i=1,2,$ zwei inhomogene Differentialgleichungssysteme gegeben. (**Bitte wenden!**)

(a) Welche der folgenden Tripel vektorwertiger Funktionen bilden ein komplexes Fundamentalsystem für den Lösungsraum der homogenen Differentialgleichung $Y' = AY$?

Tripel ist ein Fundamentalsystem ?	ja	nein
$e^{-\mathrm{i}x}\begin{pmatrix}1\\-\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}, \quad e^{\mathrm{i}x}\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}, \quad e^{2x}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$		X
$\begin{pmatrix}2\cos x\\2\sin x\\2e^{2x}\end{pmatrix}, \quad e^{-\mathrm{i}x}\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\\3e^{2x}\end{pmatrix}, \quad e^{(2-\mathrm{i})x}\begin{pmatrix}e^{-2x}\\\mathrm{i}e^{-2x}\\e^{\mathrm{i}x}\end{pmatrix}$		X
$e^{\mathrm{i}x}\begin{pmatrix}1\\-\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}, \quad e^{-\mathrm{i}x}\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}, \quad e^{2x}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$	X	

(b) Wie sieht eine allgemeine reelle Lösung der homogenen Differentialgleichung $Y' = AY$ aus?

Allgemeine reelle Lösung der homogenen DGL mit $a, b, c \in \mathbb{R}$?	ja	nein
$Y_h(x) = a\begin{pmatrix}\cos x\\\sin x\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}\sin x\\\cos x\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\e^{2x}\end{pmatrix}$		X
$Y_h(x) = a\begin{pmatrix}\cos x\\\sin x\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-\sin x\\\cos x\\-3e^{2x}\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}\cos x\\\sin x\\e^{2x}\end{pmatrix}$	X	
$Y_h(x) = a\begin{pmatrix}\cos x\\\sin x\\6e^{2x}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-\sin x\\\cos x\\-4e^{2x}\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}\sin x\\\cos x\\e^{2x}\end{pmatrix}$		X

(c) Es sei $Z_1(x) = \begin{pmatrix}-\sin x\\\cos x\\e^{2x}\end{pmatrix}$, $Z_2(x) = \begin{pmatrix}2\sin x\\2\cos x\\xe^{2x}\end{pmatrix}$ und $Z_3(x) = \begin{pmatrix}-3\sin x\\3\cos x\\xe^{2x}\end{pmatrix}$.

Welche dieser vektorwertigen Funktionen Z_1, Z_2 und Z_3 stellen partikuläre Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung $Y' = AY + T_1$ dar? Antwort: $\boxed{Z_3}$

(d) Gibt es eine Lösung $\tilde{Y}(x)$ zum DGL-System $Y' = AY + T_1$, welche die Bedingungen

$\tilde{Y}(\pi) = \begin{pmatrix}1\\0\\\pi e^{2\pi}\end{pmatrix}$ und $\tilde{Y}(0) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ erfüllt? Antwort (ja oder nein?): $\boxed{\text{nein!}}$

(e) Tritt für die allgemeine reelle Lösung des inhomogemen Differentialgleichungssystems $Y' = AY + T_2$ der Resonanzfall auf? Antwort (ja oder nein?): $\boxed{\text{ja!}}$