1. Klausur der Diplomvorprüfung

für **aer**

Aufgabe 1 (*16 Punkte*)

a) Man kann hier im Fall der Jordanmatrix eine Formel aus der Vorlesung für die Lösung der DGL benutzen (siehe unten!). Zunächst eine explizite Berechnung der Lösung.

Sei $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Das DGLSys $Y' = AY$ ist equivalent zu:

$$\begin{aligned} y_1' &= -4y_1 + y_3 \\ y_2' &= -3y_2 \\ y_3' &= -4y_3 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich bereits die allgemeine reelle Lösung für y_2, y_3:

$$\begin{aligned} y_2 &= c_2 e^{-3x}, \qquad c_2 \in \mathbb{R} \\ y_3 &= c_3 e^{-4x}, \qquad c_3 \in \mathbb{R}\ . \end{aligned}$$

Noch zu lösen: Die inhomogene DGL: $y_1' + 4y_1 = c_3 e^{-4x}$, welche wir durch Einsetzen erhalten. Das charak. Polynom ist hier $\lambda + 4$ mit Nullstelle -4, welche auch als Exponent in der rechten Seite vorkommt. Wir wählen also einen Ansatz für die Partikuläre mit einmaliger Resonanz:

$$y_p = c_p x e^{-4x} \quad .$$

Dann gilt: $y_p' = c_p e^{-4x} - 4c_p x e^{-4x}$. Einsetzen in DGL ergibt: $c_p = c_3$. Damit lautet die allgemeine reelle Lösung der DGL für y_1:

$$y_1(x) = c_3 x e^{-4x} + c_1 e^{-4x}, \qquad c_1 \in \mathbb{R}\ .$$

Die allgemeine reelle Lösung für Y lautet dann:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} c_3 x e^{-4x} + c_1 e^{-4x} \\ c_2 e^{-3x} \\ c_3 e^{-4x} \end{pmatrix}$$

mit c_1, c_2, c_3 beliebig aus $\mathbb{R}$. Die spezielle Lösung (mit $c_1 = 2, c_2 = 0, c_3 = 1$)

$$Y_s = \begin{pmatrix} x e^{-4x} + 2e^{-4x} \\ 0 \\ e^{-4x} \end{pmatrix}$$

löst das Anfangswerteproblem $Y_s(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>Zur Formel aus der Vorlesung</u>. Sei C ein $n \times n$-Jordanblock mit Eigenwert λ. Dann hat $V' = CV$ das Fundamentalsystem:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^{\lambda x} \\ \frac{1}{(n-2)!}x^{n-2}e^{\lambda x} \\ \frac{1}{(n-3)!}x^{n-3}e^{\lambda x} \\ \vdots \\ e^{\lambda x} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} xe^{\lambda x} \\ e^{\lambda x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{\lambda x} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es ist nun $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ ein Jordanblock in A, wobei die mittlere Spalte und Zeile von A gelöscht wurden. Dann ist klar, dass

$$V_1 = \begin{pmatrix} xe^{-4x} \\ 0 \\ e^{-4x} \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} e^{-4x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-3x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem ist. Man erhält die allgemeine Lösung wie oben.

b) Wir lösen das DGLSys $Y' = AY + Bx$ mit $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch eine Transformation (Alternativ siehe unten: durch einen geeigneten Ansatz). Das charak. Polynom ist gegeben durch:

$$\chi(A) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2) .$$

Es hat die Nullstellen $1, -2$ und Eigenvektoren sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Man erhält die Trafomatrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mit Inverser

$$T^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Das transformierte DGLSys lautet mit $Y := TZ$

$$Z' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} Z + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Wir erhalten $z_2 = c_2 e^{-2x}$ mit $c_2 \in \mathbb{R}$.

Ansatz für z_1 ist $z_1 = c_1 e^x + (ax + b)$ mit $c_1, a, b \in \mathbb{R}$ und dann

$$z_1' = c_1 e^x + a \ .$$

Einsetzen ergibt: $z_1' - z_1 = a - ax + b = x$. Das ist erfüllt genau dann, wenn $a = b = -1$. Somit ist

$$Z = \begin{pmatrix} c_1 e^x - (x+1) \\ c_2 e^{-2x} \end{pmatrix}$$

Lösung vom transformierten System. Dann ist

$$Y = \begin{pmatrix} c_1 e^x + 5c_2 e^{-2x} - (x+1) \\ c_1 e^x + 2c_2 e^{-2x} - (x+1) \end{pmatrix}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die gesuchte allgemeine reelle Lösung.

<u>Alternativ:</u> Man kann ansetzen für eine Partikuläre:

$$Y_p(x) = \begin{pmatrix} ax + b \\ cx + d \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (*14 Punkte*)

Im Folgenden werden alle Ergebnisse in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ angegeben. Sollte ein Prüfling das nicht beachten und keine Umformung machen, so werden die Ergebnisse unnötig komplizierte Ausdrücke im Verlauf der Rechnung. Dafür kann man Punkte abziehen.

a) Das Polynom $z^4 + 1$ hat die Nullstellen

$$p_1 = e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \qquad p_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \qquad p_3 = e^{\frac{5i\pi}{4}} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \qquad p_4 = e^{\frac{7i\pi}{4}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \ .$$

Es gilt

$$z^4 + 1 = \Pi_{j=1}^4 (z - p_j) \qquad .$$

Die Punkte $p_1, \ldots, p_4$ sind genau die Pole von $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$. Diese Pole sind 1. Ordnung und es gilt

$$\mathrm{Res}(f, p_l) = \Pi_{j \neq l} \frac{1}{p_l - p_j} \ , \qquad l = 1, \ldots, 4 \ .$$

Konkret ergibt das:

$$\mathrm{Res}(f, p_1) = (\sqrt{2})^3 \cdot 2^{-3} \cdot (1 \cdot (1+i) \cdot i)^{-1} = \tfrac{-1-i}{4\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{Res}(f, p_2) = (\sqrt{2})^3 \cdot 2^{-3} \cdot (-1 \cdot i \cdot (-1+i))^{-1} = \tfrac{1-i}{4\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{Res}(f, p_3) = (\sqrt{2})^3 \cdot 2^{-3} \cdot (-(1+i) \cdot (-i) \cdot (-1))^{-1} = \tfrac{1+i}{4\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{Res}(f, p_4) = (\sqrt{2})^3 \cdot 2^{-3} \cdot (-i \cdot (1-i) \cdot 1)^{-1} = \tfrac{-1+i}{4\sqrt{2}}$$

b) Die Kreise $C(r)$ haben für $r > 0$ den Mittelpunkt in $p_3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$. Weiter gilt:

$$\begin{array}{ll} |p_3 - p_j| \geqq \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} > 1 & \text{für } j = 1, 2, 4 \\ |p_3 - p_j| \leqq \sqrt{2} < \frac{3}{2} & \text{für } j = 2, 3, 4 \\ |p_3 - p_j| \leqq 2 < 3 & \text{für } j = 1, 2, 3, 4 \ . \end{array}$$

Mit den zuvor berechneten Residuen ergibt sich für die komplexen Kurvenintegrale:

$$\textstyle\int_{C(1)} f(z)dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f, p_3) = \frac{\pi(-1+i)}{2\sqrt{2}}$$

$$\textstyle\int_{C(3/2)} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{j \neq 4} \mathrm{Res}(f, p_j) = \frac{\pi(-1+i)}{2\sqrt{2}}$$

$$\textstyle\int_{C(3)} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^4 \mathrm{Res}(f, p_j) = 0$$

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

a) Es gilt $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi x dx = \frac{\pi}{4}$ und weiter für $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi x e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{-2\pi i k} x e^{-ikx}\Big|_0^\pi - \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{1}{-ik} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{(-1)^k i}{2k} + \frac{1}{2\pi k^2}((-1)^k - 1) \qquad \text{Diese Zeile wäre bereits genug als Ergebniss!} \\ &= \begin{cases} \frac{(-1)^k i}{2k} & \text{für } k = \text{gerade} \\ \frac{(-1)^k i}{2k} - \frac{1}{\pi k^2} & \text{für } k = \text{ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

b) Die Koeffizienten der reellen Fourier-Reihe ergeben sich durch: $\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{\pi}{4}$ und weiter für $k \neq 0$:

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

In Reihenform haben wir dann (die erste Zeile genügt wiederum als Ergebnis!):

$$\begin{aligned} S_f(x) &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2}\cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos((2l-1)x)}{(2l-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx) \end{aligned}$$

c) Die periodische Funktion $f(x)$ ist unstetig in den Punkten

$$D := \{\ (2k+1)\cdot\pi \mid k \in \mathbb{Z}\ \}\ .$$

Ansonsten ist $f(x)$ stetig. Die Reihe $S_f(x)$ konvergiert gegen $f(x)$ genau in den Punkten, wo f stetig ist, d.h. in den Punkten

$$\mathbb{R} \setminus D\ .$$

(Ansonsten konvergiert $S_f(x)$ gegen den Mittelwert an der Unstetigkeitsstelle.)

d) Die Reihe S_f konvergiert nicht punktweise auf $\mathbb{R}$, also auch nicht gleichmäßig!

Name:		**Matrikelnr:**		**Fach:**	

Aufgabe 4 (*7 Punkte*) Kreuzen Sie an, ob die folgenden Differentialgleichungen linear oder exakt sind, oder sich durch elementare Umformungen in trennbare (separable) Differentialgleichungen umwandeln lassen. Mehrfachnennungen sind möglich.

Differentialgleichung	linear	exakt	trennbar
$y(x) + xy'(x) = 0$	$\times$	$\times$	$\times$
$\sin(x)y''(x) + \cos(x)y'(x) + y(x) = e^x$	$\times$		
$2y(x)y'(x) = 0$		$\times$	$\times$
$\left(\frac{x}{y(x)}\right)^2 + y'(x) = 0$			$\times$

Aufgabe 5 (*6 Punkte*) Kreuzen Sie an, ob die folgenden Funktionen auf gesamt $\mathbb{C}$ analytisch (bzw. analytisch fortsetzbar) sind.

Funktion	analytisch (fortsetzbar)	nicht analytisch
$e^{\sin(z)}$	$\times$	
$\tanh(2z)$		$\times$
$\overline{z}^2$		$\times$
$\frac{z^3+z^2+z+1}{z^2+1}$	$\times$	