1./2. Klausur der Diplomvorprüfung

für **aer, autip, verf, wewi**

Aufgabe 1 (*12 Punkte*)

(a) Für das zugehörige charakteristische Polynom erhält man

$$2\lambda^2 + 5\lambda + 2 = (2\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = -1/2$ und $\lambda_2 = -2$. Damit ergibt sich für die allgemeine reelle Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{-2x}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu erhalten, wählt man den Anstaz vom Typ der rechten Seite (keine Resonanz!)

$$\begin{aligned}
y_{\text{sp}}(x) &= a\sin(-2x)e^{-2x} + b\cos(-2x)e^{-2x}\\
y'_{\text{sp}}(x) &= -2a\sin(-2x)e^{-2x} - 2a\cos(-2x)e^{-2x} - 2b\cos(-2x)e^{-2x} + 2b\sin(-2x)e^{-2x}\\
y''_{\text{sp}}(x) &= 8a\cos(-2x)e^{-2x} - 8b\sin(-2x)e^{-2x}
\end{aligned}$$

und nach Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man

$$(-8a - 6b)\sin(-2x)e^{-2x} + (6a - 8b)\cos(-2x)e^{-2x} = 50\sin(-2x)e^{-2x}\,,$$

sowie nach Koeffizientenvergleich das LGS

$$\begin{aligned}
-8a - 6b &= 50\\
6a - 8b &= 0
\end{aligned}$$

mit der Lösung $a = -4,\ b = -3$, d. h. $y_{\text{sp}}(x) = -4\sin(-2x)e^{-2x} - 3\cos(-2x)e^{-2x}$. Damit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$)

$$y_{\text{allg}}(x) = y_{\text{sp}}(x) + y_{\text{hom}}(x) = -4\sin(-2x)e^{-2x} - 3\cos(-2x)e^{-2x} + c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{-2x}\,.$$

(c) Man erhält

$$y'_{\text{allg}}(x) = 2\sin(-2x)e^{-2x} + 14\cos(-2x)e^{-2x} - \frac{c_1}{2}e^{-x/2} - 2c_2 e^{-2x}$$

und damit für das Anfangswertproblem die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\widetilde{y}(0) &= -3 + c_1 + c_2 = 2\\
\widetilde{y}'(0) &= 14 - \frac{c_1}{2} - 2c_2 = 7
\end{aligned}$$

mit der Lösung $c_1 = 2,\ c_2 = 3$, d. h. $\widetilde{y}(x) = -4\sin(-2x)e^{-2x} - 3\cos(-2x)e^{-2x} + 2e^{-x/2} + 3e^{-2x}$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \widetilde{y}(x) = 0$.

Aufgabe 2 (*15 Punkte*)

(a) Mit der Parametrisierung

$$\Psi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leqq r \leqq 1, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,$$

der Kreisscheibe S erhält man für den Normalenvektor

$$\Psi_r \times \Psi_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

und damit für den Fluß von $\vec{V}$ durch S (von oben nach unten)

$$\int_{r=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} d\varphi\, dr = \int_{r=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi} 0\, d\varphi\, dr = 0\,.$$

(b) Mit der Parametrisierung

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 1-r^{2\alpha} \end{pmatrix}, \quad 0 \leqq r \leqq 1, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,$$

des Graphen $\mathcal{G}(\alpha)$ erhält man für den Normalenvektor

$$\Phi_r \times \Phi_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ -2\alpha r^{2\alpha-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha r^{2\alpha}\cos(\varphi) \\ 2\alpha r^{2\alpha}\sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix}$$

und damit für den Fluß von $\vec{V}$ durch $\mathcal{G}(\alpha)$ (von unten nach oben)

$$\begin{aligned}\int_{r=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 1-r^{2\alpha} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\alpha r^{2\alpha}\cos(\varphi) \\ 2\alpha r^{2\alpha}\sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix} d\varphi\, dr &= \int_{r=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi} (2\alpha-1)r^{2\alpha+1} + r\, d\varphi\, dr \\ &= 2\pi\left[\frac{2\alpha-1}{2\alpha+2}r^{2\alpha+2} + \frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{1} = \frac{3\alpha}{\alpha+1}\,\pi\,.\end{aligned}$$

(c) Nach dem Satz von Gauß ist (mit obigem)

$$\iiint\limits_{K(\alpha)} \operatorname{div}(V)\, dV = \iint\limits_{S\bigcup\mathcal{G}(\alpha)} \vec{V}\cdot\vec{n}\, dF = 0 + \frac{3\alpha}{\alpha+1}\,\pi \overset{!}{=} \pi\,,$$

und damit $\alpha = \frac{1}{2}$.

(d) Man berechnet

$$h = \iiint\limits_{K(1)} z\,dV \overset{\text{Zylinderkoordinaten}}{=} \int\limits_{r=0}^{1}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{z=0}^{1-r^2} zr\,dz\,d\varphi\,dr = 2\pi\int\limits_{r=0}^{1} r\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{1-r^2} dr$$

$$= \pi\int\limits_{r=0}^{1} r - 2r^3 + r^5\,dr = \pi\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{2} + \frac{r^6}{6}\right]_{r=0}^{1} = \frac{\pi}{6}\,.$$

Aus Symmetriegründen muß der Schwerpunkt von $K(1)$ auf der z-Achse liegen. Weiterhin ist $\operatorname{div}(V) = 3$ und damit die Masse von $K(1)$

$$M_{K(1)} = \iiint\limits_{K(1)} 1\,dV = \frac{1}{3}\iiint\limits_{K(1)} \operatorname{div}(V)\,dV = \frac{1}{3}\,\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Damit ergibt sich für die z-Koordinate des Schwerpunkts

$$\frac{h}{M_{K(1)}} = \frac{1}{3}$$

und damit für den Schwerpunkt selber $\vec{S} = (0, 0, 1/3)$.

Aufgabe 3 (*8 Punkte*)

(a) Es ist

$$\frac{1}{z^2 - \mathrm{i}z} = \frac{1}{z(z-\mathrm{i})},$$

d. h. der maximale Definitionsbereich ist $D = \mathbb{C}\backslash\{0, \mathrm{i}\}$.

(b) Die Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{1}{z^2 - \mathrm{i}z} = \frac{\mathrm{i}}{z} - \frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}.$$

(c) Es ist

$$\frac{1}{z-\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{1-(-\mathrm{i}z)} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty}(-\mathrm{i})^k z^k$$

die gesuchte Taylor-Reihenentwicklung für $|z| < 1$.

(d) Mit **(b)** und **(c)** erhält man

$$\frac{1}{z^2 - \mathrm{i}z} = \frac{\mathrm{i}}{z} - \frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{z} + \sum_{k=0}^{\infty}(-\mathrm{i})^k z^k = \sum_{k=-1}^{\infty}(-\mathrm{i})^k z^k$$

für die Laurent-Reihenentwicklung um $z = 0$, die für $0 < |z| < 1$ – d. h. im Kreisring zwischen den Polen $z = 0$ und $z = \mathrm{i}$ – konvergiert.

Name: | **Matrikelnr:** | **Fach:**

Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

Es sei die 2π-periodische Funktion $f(x) := |\cos(\frac{x}{2})|$ auf $\mathbb{R}$ gegeben.
Man beachte, dass gilt: $\cos(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\mathrm{i}x}{2}} + e^{\frac{-\mathrm{i}x}{2}} \right)$.

(a) Man berechne die komplexen Fourierkoeffizienten $c_k(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\mathrm{i}kx}dx$:

$$c_0(f) = \boxed{\frac{2}{\pi}}$$

$$c_k(f) = \boxed{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{1-4k^2}} \quad , k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} .$$

(b) Man gebe die reelle Fourierreihe $S_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$ an:

$$S_f(x) = \boxed{\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-4k^2} \cos(kx)}$$

(c) Konvergiert die Fourierreihe $S_f(x)$ auf $\mathbb{R}$ punktweise gegen f, ja oder nein? Antwort: ja

(d) Konvergiert die Fourierreihe S_f auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f, ja oder nein? Antwort: ja

Aufgabe 5 (*8 Punkte*)

Geben Sie die Werte der folgenden komplexen Kurvenintegrale an, wobei der Weg C den am Ursprung zentrierten Einheitskreis einmal gegen den Uhrzeigersinn durchläuft.

$\int_C \frac{2}{1+2\mathrm{i}z}\,dz$	$\int_C e^{\cos(z)}\,dz$	$\int_C \left(\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z}\right)^3 dz$	$\int_C \frac{1}{\|z\|}\,dz$
2π	0	$-9\pi\mathrm{i}$	0