

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$$

gegeben. Wir betrachten den Körper

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \quad \text{und} \quad 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

sowie dessen Deckfläche

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \quad \text{und} \quad z = f(x, y)\}.$$

Diese Fläche sei so orientiert, dass der Normalenvektor auf F in das Äußere von K zeigt.

3.1 (3 Punkte) Berechnen Sie das Volumen von K .

3.2 (3 Punkte) Berechnen Sie das Oberflächenintegral erster Art

$$\int_F \frac{d\sigma}{\sqrt{1 + 5x^2 + 5y^2 + 8xy}},$$

wobei $d\sigma$ das Oberflächenelement von F bezeichnet.

3.3 (4 Punkte) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$v(x, y, z) = (x, y, z)^t$$

durch die Fläche F .

Prüfung HM III el, kyb Teil 1

Universität Stuttgart
 Fachbereich Mathematik
 Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung

5.3.2007

Name	Vorname	Matr.-nummer	Fach

Anmerkungen zur Korrektur:

1.1	1.2	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3

1	2	3	Summe	Note

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 1.1 ein:

Aufgabe 1.1		Ja	Nein
1.1.a	f besitzt eine Stammfunktion.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
1.1.b	Ist f beschränkt, so ist f konstant.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
1.1.c	K ist sternförmig.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
1.1.d	Nimmt f im inneren von K sein Maximum an, so ist f konstant.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
1.1.e	Es gilt $f(-i) = i$ im Fall $r = 1/2$, $R = 2$ und f gleich i in einer Umgebung von i .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 1 (11 Punkte)

1.1 (5 Punkte) Man betrachte für $0 < r < R$ das Gebiet $K_{rR} = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$ und dessen Abschluß $\overline{K_{rR}} = \{z \in \mathbb{C} \mid r \leq |z| \leq R\}$.

Im Weiteren ist $f : \overline{K_{rR}} \rightarrow \mathbb{C}$ eine beliebige stetige Funktion, welche zudem in K_{rR} analytisch ist. Sind dann folgende Aussagen immer wahr? Markieren Sie Ihre Antworten in der Tabelle auf Seite 1. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

1.1.a (1P) f besitzt eine Stammfunktion.

1.1.b (1P) Ist f beschränkt, so ist f konstant.

1.1.c (1P) K_{rR} ist sternförmig.

1.1.d (1P) Nimmt $|f|$ im Inneren von K_{rR} ein lokales Maximum an, so ist f konstant.

1.1.e (1P) Sei $r = 1/2$ und $R = 2$. Ist $f(z) = i$ für alle z mit $|z - i| < 10^{-9}$, so gilt auch $f(-i) = i$.

1.2 (6 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{\cos z}{(z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2)}$$

und die zwei geschlossenen Integrationswege

$$\gamma_1 = \{z : |z - i| = 1/2\} \quad \text{und} \quad \gamma_2 = \{z : |z - 2i - 2| = 2\},$$

welche einfach in mathematisch positiver Richtung (entgegen dem Uhrzeigersinn) durchlaufen werden. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz, \quad \int_{\gamma_2} f(z) dz \quad \text{sowie} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Aufgabe 2 (11 Punkte)

2.1 (3 Punkte) Formulieren Sie den Satz zum Vertauschen von Grenzwerten für Doppelfolgen.

2.2 (4 Punkte) Betrachten Sie die Doppelfolgen

$$a) \quad a_{n,m} = \frac{2n + 3m}{n + m}, \quad b) \quad a_{n,m} = \frac{m^2 n + m^2}{1 + m^2 n}.$$

Entscheiden Sie in beiden Fällen, ob

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n,m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,m}$$

gilt und ob der Satz zur Vertauschung von Grenzwerten anwendbar ist.

2.3 (3 Punkte) Gegeben Sei die Funktion

$$f(x) = \int_{1/x}^x \frac{\sqrt{1 + e^{tx}}}{t} dt, \quad x \in [1, 2].$$

Berechnen Sie die Ableitung von f in der Variablen x .