6.3 (3 Punkte) Gegeben sei das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \quad F(x,y,z) = (-\sin x \sin z, z^2, 2zy + \cos x \cos z)^t\,.$$

Zeigen Sie, dass F ein Gradientenfeld ist und finden Sie eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, so dass

$$F = \nabla \varphi\,.$$

Prüfung HM III el, kyb Teil 2

Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung

6.3.2007

Name	**Vorname**	**Matr.-nummer**	**Fach**

Anmerkungen zur Korrektur:

4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	5.3	6.1	6.2	6.3

4	5	6	Summe	Note

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 4.1 ein:

Aufgabe 4.1		Ja	Nein
4.1.a	f besitzt im Punkt $z = 0$ eine wesentliche Singularität	☐	☐
4.1.b	f besitzt im Punkt $z = -1$ eine hebbare Singularität	☐	☐
4.1.c	f besitzt im Punkt $z = 1$ eine einfache Polstelle	☐	☐
4.1.d	f besitzt im Punkt $z = 2$ eine einfache Polstelle	☐	☐

Aufgabe 4 (11 Punkte)

4.1 (4 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}\,\sin(1+z)}{(z^2-1)(z^2-3z+2)}\,, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, +1, -1, 2\}.$$

Sind folgende Aussagen wahr? Markieren Sie Ihre Antworten in der Tabelle auf Seite 2. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

4.1.a f besitzt im Punkt $z = 0$ eine wesentliche Singularität.

4.1.b f besitzt im Punkt $z = -1$ eine hebbare Singularität.

4.1.c f besitzt im Punkt $z = 1$ eine einfache Polstelle.

4.1.d f besitzt im Punkt $z = 2$ eine einfache Polstelle.

4.2 (2 Punkte) Es seien $a, b > 0$ und $a \neq b$. Entwickeln Sie die Funktion

$$\frac{1}{az+b}$$

um den Punkt $z_0 = 1$ in eine Potenzreihe und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

4.3 (2 Punkte) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx\,.$$

Aufgabe 5 (12 Punkte)

5.1 (4 Punkte) Formulieren Sie den Satz von Picard-Lindelöf und den Satz von Peano zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen.

5.2 (4 Punkte) Berechnen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(x) = x\sqrt[5]{y^2(x)}\,.$$

Welche der obigen Sätze sind auf diese Differentialgleichung anwendbar?

5.3 (4 Punkte) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + 2xy(x) = 3x\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 6

6.1 (4 Punkte) Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und $F : D \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf D. Nennen Sie notwendige Bedingungen an $\operatorname{div} F$ und $\operatorname{rot} F$, unter denen F ein Gradienten- bzw. Wirbelfeld ist. Unter welchen Voraussetzungen an D sind diese Bedingungen notwendig und hinreichend?

6.2 (3 Punkte) Gegeben seinen die Vektorfelder $F^{(i)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned} F^{(1)} &= (x, y, z)^t\,, \\ F^{(2)} &= (\tan y \sin z, \cos z, \sin x \tan y)^t\,, \\ F^{(3)} &= (x + yz, 2(y + xz), 3(z + xy))^t\,. \end{aligned}$$

Überprüfen Sie, ob diese Vektorfelder Gradienten- oder Wirbelfelder sind.