2.3 (4 Punkte) Es sei $A = A(1)$ und $\mathbb{I}$ bezeichne die Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass sich jede Potenz A^n für $n \in \mathbb{N}$ in der Form

$$A^n = b_n A + c_n \mathbb{I}$$

mit geeigneten ganzzahligen Koeffizienten b_n und c_n darstellen läßt.

Aufgabe 3 (11 Punkte)

3.1 (5 Punkte) Man betrachte für $0 < r < R$ das Gebiet $K_{rR} = \{z \in \mathbb{C} | \, r < |z| < R\}$ und dessen Abschluß $\overline{K_{rR}} = \{z \in \mathbb{C} | \, r \leq |z| \leq R\}$.

Im Weiteren ist $f : \overline{K_{rR}} \to \mathbb{C}$ eine beliebige stetige Funktion, welche zudem in K_{rR} analytisch ist. Sind dann folgende Aussagen immer wahr? Markieren Sie Ihre Antworten in der Tabelle auf Seite 1. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

3.1.a (1P) f besitzt eine Stammfunktion.

3.1.b (1P) Ist f beschränkt, so ist f konstant.

3.1.c (1P) K_{rR} ist sternförmig.

3.1.d (1P) Nimmt $|f|$ im Inneren von K_{rR} ein lokales Maximum an, so ist f konstant.

3.1.e (1P) Sei $r = 1/2$ und $R = 2$. Ist $f(z) = i$ für alle z mit $|z - i| < 10^{-9}$, so gilt auch $f(-i) = i$.

3.2 (6 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{\cos z}{(z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2)}$$

und die zwei geschlossenen Integrationswege

$$\gamma_1 = \{z \,:\, |z - i| = 1/2\} \quad \text{und} \quad \gamma_2 = \{z \,:\, |z - 2i - 2| = 2\}\,,$$

welche einfach in mathematisch positiver Richtung (entgegen dem Uhrzeigersinn) durchlaufen werden. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z\,, \quad \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}\,z \quad \text{sowie} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x\,.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$$

gegeben. Wir betrachten den Körper

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \quad \text{und} \quad 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

sowie dessen Deckfläche

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \quad \text{und} \quad z = f(x, y)\}\,.$$

Diese Fläche sei so orientiert, dass der Normalenvektor auf F in das Äußere von K zeigt.

4.1 (3 Punkte) Berechnen Sie das Volumen von K.

4.2 (3 Punkte) Berechnen Sie das Oberflächenintegral erster Art

$$\int_F \frac{d\sigma}{\sqrt{1 + 5x^2 + 5y^2 + 8xy}}\,,$$

wobei $d\sigma$ das Oberflächenelement von F bezeichnet.

4.3 (4 Punkte) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$v(x, y, z) = (x, y, z)^t$$

durch die Fläche F.

Prüfung Vordiplom Mathematik für Physiker, Teil 1

Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung

5.3.2007

Name	Vorname	Matr.-nummer

Anmerkungen zur Korrektur:

1.1	1.2	1.3	**Aufgabe 1**	2.1	2.2	2.3	**Aufgabe 2**

3.1	3.2	3.3	**Aufgabe 3**	4.1	4.2	4.3	**Aufgabe 4**

1	2	3	4	Summe	

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 1.1 ein:

Aufgabe 1.1		Ja	Nein
1.1.a	$B(t)$ ist invertierbar für alle $t \in \mathbb{R}$	☐	☐
1.1.b	A ist unitär	☐	☐
1.1.c	A ist hermitisch	☐	☐
1.1.d	A ist diagonalisierbar	☐	☐
1.1.e	$\exists\, t \in \mathbb{R} : B(t)$ diagonalisierbar	☐	☐
1.1.f	$B(1)$ besitzt nur reelle Eigenwerte	☐	☐

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgabe 1.2 ein:

Aufgabe 1.2		Ergebnis
1.2.a	Das charakteristische Polynom von C	
1.2.b	$\mathrm{Spur}(CDC^{-1} - C)$	
1.2.c	$\det(C^2 - C^t)$	
1.2.d	die Eigenwerte von C sowie ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten	

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 3.1 ein:

Aufgabe 3.1		Ja	Nein
3.1.a	f besitzt eine Stammfunktion.	☐	☐
3.1.b	Ist f beschränkt, so ist f konstant.	☐	☐
3.1.c	K_{rR} ist sternförmig.	☐	☐
3.1.d	Nimmt $\lvert f\rvert$ im Inneren von K_{rR} ein lokales Maximum an, so ist f konstant.	☐	☐
3.1.e	Sei $r = 1/2$ und $R = 2$. Ist $f(z) = i$ für alle z mit $\lvert z - i\rvert < 10^{-9}$, so gilt auch $f(-i) = i$.	☐	☐

Aufgabe 1 (17 Punkte)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2} \\ -i & \sqrt{2} & 1 \\ i & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & t & i \\ 1 & 0 & t \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.1 (6 Punkte) Sind folgende Aussagen wahr? Markieren Sie Ihre Antworten in der Tabelle auf Seite 2. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

1.1.a (1P) Die Matrix $B(t)$ ist invertierbar für alle $t \in \mathbb{R}$.

1.1.b (1P) Die Matrix A ist unitär.

1.1.c (1P) Die Matrix A ist hermitisch.

1.1.d (1P) Die Matrix A ist diagonalisierbar.

1.1.e (1P) Es gibt ein t, so dass $B(t)$ diagonalisierbar ist.

1.1.f (1P) $B(1)$ besitzt nur reelle Eigenwerte.

1.2 (4 Punkte) Gegeben seien die Matrizen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie folgende Größen und tragen Sie diese in die Tabelle auf Seite 2 ein. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

1.2.a (1P) Das charakteristische Polynom von C.

1.2.b (1P) $\mathrm{Spur}(CDC^{-1} - C) = \mathrm{tr}\,(CDC^{-1} - C)$

1.2.c (1P) $\det(C^2 - C^t)$

1.2.d (1P) Die Eigenwerte von C sowie ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

1.3 (7 Punkte) Sei D die in der Aufgabe 1.2 gegebene Matrix.

1.3.a (2P) Es sei $\mathbb{I}$ die Einheitsmatrix. Berechnen Sie die Matrix $(\mathbb{I} + D)^{-1}$.

1.3.b (3P) Zeigen Sie, dass für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$D^{2n} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}, \quad D^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^n & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 2^n & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1.3.c (2P) Bestimmen Sie mit Hilfe von (1) den Rang der Matrix

$$F_n = 2D^{2n} + D^{2n+1}$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Gegeben sei ein reeller Parameter κ und die Matrix

$$A(\kappa) = \begin{pmatrix} \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1 (4 Punkte) Untersuchen Sie mit Hilfe einer geeigneten Fallunterscheidung die Lösbarkeit in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems

$$A(\kappa)\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

in Abhängigkeit von $\kappa \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems. Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich!

2.2 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$A^n(\kappa) = \begin{pmatrix} \kappa^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A^n(\kappa)$ und ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten. Bestimmen Sie $e^{tA(\kappa)}$ für beliebige $\kappa, t \in \mathbb{R}$.