**7.1 (4 Punkte)**

7.1.a (2P) Entwickeln Sie die Funktion $f$ um einem beliebigen Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in T$ in eine Taylorreihe.

7.1.b (2P) Finden Sie alle kritischen Punkte von $f$ im Inneren von $T$. Entscheiden Sie, ob $f$ in diesen Punkten jeweils einen lokalen Extremwert annimmt.

**7.2 (4 Punkte)** Bestimmen Sie Maximum und Minimum von $f$ unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 8\,.$$

Wo auf $T$ nimmt die Funktion $f$ ihr globales Maximum und ihr globales Minimum an?

**7.3 (4 Punkte)** Sei $f(x,y,z)$ wie oben gegeben. Für welche $(x,y,z)$ läßt sich die Variable $z = z(x,y)$ aus der Gleichung

$$f(x,y,z(x,y)) = -1$$

lokal nach $x$ und $y$ auflösen? Berechnen Sie $\partial z(x,y)/\partial x$ und $\partial z(x,y)/\partial y$.

## Aufgabe 8 (12 Punkte)

**8.1 (4 Punkte)** Formulieren Sie den Satz von Picard-Lindelöf und den Satz von Peano zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen.

**8.2 (4 Punkte)** Berechnen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'(x) = x\sqrt[5]{y^2(x)}\,.$$

Welche der obigen Sätze sind auf diese Differentialgleichung anwendbar?

**8.3 (4 Punkte)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + 2xy(x) = 3x\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$



# Prüfung Vordiplom Mathematik für Physiker, Teil 2

Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung

6.3.2007

| **Name** | **Vorname** | **Matr.-nummer** |
|---|---|---|
| | | |

Anmerkungen zur Korrektur:

| 5.1 | 5.2 | 5.3 | **Aufgabe 5** | 6.1 | 6.2 | 6.3 | **Aufgabe 6** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |
| 7.1 | 7.2 | 7.3 | **Aufgabe 7** | 8.1 | 8.2 | 8.3 | **Aufgabe 8** |
| | | | | | | | |

| 5 | 6 | 7 | 8 | Summe | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 5.3 ein:

| Aufgabe 5.3 | | Ergebnis |
|---|---|---|
| 5.3.a | $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1-2x\,e^x}{x^3}$ | |
| 5.3.b | $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(xe^{-\frac{1}{x}})}{x}$ | |

## Aufgabe 5 (17 Punkte)

### 5.1 (8 Punkte)

5.1.a (2 P) Geben Sie die Definition der bedingten und der absoluten Konvergenz einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ an.

5.1.b (6 P) Verwenden Sie ein geeignetes Konvergenzkriterium und entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen absolut bzw. bedingt konvergieren:

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{n!}\,, \qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n!\, e^{-n^2}\,, \qquad (iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(1+n)}\,.$$

### 5.2 (5 Punkte)

5.2.a (1 P) Geben Sie die Formel (von Hadamard) für den Konvergenzradius einer Potenzreihe an.

5.2.b (2 P) Bestimmen Sie den Konvergenzradius $R$ der Potenzreihe

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^{2n}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Berechnen Sie $S(z)$ für alle $z$ mit $|z| < R$.

5.2.c (2 P) Geben Sie außerdem die Taylorreihe für $S_1(z) = dS(z)/dz$ um den Punkt $z_0 = 0$ an. Was kann man über die Konvergenz dieser Reihe aussagen?



**5.3 (4 Punkte)** Bestimmen Sie folgende Grenzwerte und tragen Sie Ihre Antworten in die Tabelle auf Seite 2 ein. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

$$a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1-2x\,e^x}{x^3}\,, \qquad b) \quad \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(xe^{-\frac{1}{x}})}{x}\,.$$

## Aufgabe 6 (9 Punkte)

**6.1 (4 Punkte)** Zeigen Sie mit Hilfe der Taylorschen Formel, dass

$$x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\,, \quad x \in [0,1]\,. \tag{1}$$

**6.2 (2 Punkte)** Benutzen Sie (1) um zu zeigen, dass

$$\frac{1}{3} \le \int_0^1 \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}\,dx \le \frac{1}{2}\,.$$

**6.3 (3 Punkte)** Berechnen Sie

$$\int_0^1 \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}\,dx\,.$$

## Aufgabe 7 (12 Punkte)

Die Funktion $f : T \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x,y,z) := xy - 2(x^2+y^2+z^2)\,,$$

wobei

$$T := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+2z^2 \le 8\}\,.$$