gegeben. Wir betrachten den Körper

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \quad \text{und} \quad 0 \le z \le f(x,y)\}$$

sowie dessen Deckfläche

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \quad \text{und} \quad z = f(x,y)\} .$$

Diese Fläche sei so orientiert, dass der Normalenvektor auf F in das Äußere von K zeigt.

3.1 (3 Punkte) Berechnen Sie das Volumen von K.

3.2 (4 Punkte) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$v(x,y,z) = (x,y,z)^t$$

durch die Fläche F.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Berechnen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' + 2y = \cosh x \,.$$

Prüfung HM III geod

Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis, Dynamik und Modellierung

5.3.2007

Name	**Vorname**	**Matr.-nummer**	**Fach**

Anmerkungen zur Korrektur:

1.1	1.2	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	4

1	2	3	4	Summe	Note

Bitte tragen Sie in die folgende Tabelle die Lösungen der Aufgaben 1.1 ein:

Aufgabe 1.1		Ja	Nein
1.1.a	f besitzt eine Stammfunktion.	☐	☐
1.1.b	Ist f beschränkt, so ist f konstant.	☐	☐
1.1.c	K ist sternförmig.	☐	☐
1.1.d	Nimmt f im inneren von K sein Maximum an, so ist f konstant.	☐	☐
1.1.e	Es gilt $f(-\mathrm{i}) = \mathrm{i}$ im Fall $r = 1/2$, $R = 2$ und f gleich i in einer Umgebung von i.	☐	☐

Aufgabe 1 (11 Punkte)

1.1 (5 Punkte) Man betrachte für $0 < r < R$ das Gebiet $K_{rR} = \{z \in \mathbb{C} | \, r < |z| < R\}$ und dessen Abschluß $\overline{K_{rR}} = \{z \in \mathbb{C} | \, r \leq |z| \leq R\}$.

Im Weiteren ist $f : \overline{K_{rR}} \to \mathbb{C}$ eine beliebige stetige Funktion, welche zudem in K_{rR} analytisch ist. Sind dann folgende Aussagen immer wahr? Markieren Sie Ihre Antworten in der Tabelle auf Seite 1. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

1.1.a (1P) f besitzt eine Stammfunktion.

1.1.b (1P) Ist f beschränkt, so ist f konstant.

1.1.c (1P) K_{rR} ist sternförmig.

1.1.d (1P) Nimmt $|f|$ im Inneren von K_{rR} ein lokales Maximum an, so ist f konstant.

1.1.e (1P) Sei $r = 1/2$ und $R = 2$. Ist $f(z) = i$ für alle z mit $|z - i| < 10^{-9}$, so gilt auch $f(-i) = i$.

1.2 (6 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{\cos z}{(z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2)} .$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}\, x .$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

2.1 (3 Punkte) Formulieren Sie den Satz zum Vertauschen von Grenzwerten für Doppelfolgen.

2.2 (4 Punkte) Betrachten Sie die Doppelfolgen

$$a) \quad a_{n,m} = \frac{2n + 3m}{n + m}, \qquad b) \quad a_{n,m} = \frac{m^2 n + m^2}{1 + m^2 n} .$$

Entscheiden Sie in beiden Fällen, ob

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{n,m} = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{n,m}$$

gilt und ob der Satz zur Vertauschung von Grenzwerten anwendbar ist.

2.3 (3 Punkte) Gegeben Sei die Funktion

$$f(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{\sqrt{1 + \mathrm{e}^{tx}}}{t} \, dt , \quad x \in [1, 2] .$$

Berechnen Sie die Ableitung von f in der Variablen x.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Es sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$$