Prof. Dr. C. Hesse, Prof. Dr. W. Kimmerle,
Prof. Dr. C. Rohde, Prof. Dr. G. Schneider
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Höhere Mathematik I–III **Diplomvorprüfung** **3. 3. 2008**

1. Klausur

für Studierende der Fachrichtung
phys

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **180 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** jeweils 10 handbeschriebene DIN A4 Blätter für HMI/II sowie HMIII.
- Bei den **Aufgaben 1-9** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In dieser Klausur können bis zu **74 Punkte** erreicht werden.
- Die Prüfungsergebnisse sind über das Studenteninformationssystem der Universität Stuttgart (studIUS) zu erfragen. (https://studius.uni-stuttgart.de/)

  Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Soweit mündliche Nachprüfungen erforderlich sein sollten, werden die nötigen Informationen zusammen mit den Prüfungsergebnissen bekannt gegeben. Eine individuelle Benachrichtigung der betreffenden Kandidatinnen und Kandidaten erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an der Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (8 Punkte): Bestimmen Sie

a) $\int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ mit Hilfe der Substitution $u = \sqrt{x}$,

b) $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^2(1+x)}$.

Aufgabe 2 (11 Punkte): Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3+\alpha & 1-\alpha & 0 \\ 1-\alpha & 3+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

a) Bestimmen Sie zum Eigenwert $\lambda = 4$ zwei Eigenvektoren $\vec{f_1}$ und $\vec{f_2}$ der Matrix A mit $\vec{f_1} \perp \vec{f_2}$.

b) Geben Sie einen von $\vec{f_1}$ und $\vec{f_2}$ linear unabhängigen Eigenvektor $\vec{f_3}$ von A und den zugehörigen Eigenwert an.

c) Geben Sie eine Orthogonalmatrix S und eine Diagonalmatrix D an, so dass $S^TAS = D$ gilt.

d) Gegeben sei eine Schar von Quadriken durch

$$Q_\alpha : \quad (3+\alpha)x_1^2 + (3+\alpha)x_2^2 + (2-2\alpha)x_1x_2 + 4x_3^2 = 1\,.$$

i) Bestimmen Sie die euklidische Normalform dieser Quadriken.

ii) Für welches α ist Q_α eine Kugel?

iii) Was für eine Quadrik ist Q_{-1} ?

e) Wie lautet die Gleichung der Ebene $x_1 = 1$ nach der Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ?$$

Aufgabe 3 (10 Punkte): Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = (1-x^2)\, e^{-x^2}$.

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Symmetrie, Nullstellen und Extremstellen.

b) Bestimmen Sie das Verhalten der Funktion f für $|x| \to \infty$ und skizzieren Sie den Graphen von f.

c) Entwickeln Sie die Funktion f in eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Aufgabe 4 (8 Punkte): Bestimmen Sie das Minimum der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto 4\,x^2 + z$$

auf der Schnittkurve des parabolischen Zylinders $\mathcal{Z} : x + y^2 = 0$ und der Ebene $\mathcal{E} : 2y - z = 1$.

Aufgabe 5 (7 Punkte): Bestimmen Sie die Lösung des nichtlinearen Randwertproblems

$$\ddot{u}(x) = \frac{1}{4(\dot{u}(x))^3}\,, \qquad x \in (0,1)$$

$$\dot{u}(0) = 0\,,\ u(1) = 0\,.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Substitution $y = \dot{u}$ und Trennung der Variablen.

Aufgabe 6 (6 Punkte):
Finden Sie eine Möbiustransformation $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit
$f(0) = 3$, $f(1) = \frac{4}{3}$, $f(i) = 1 - i$ und $f(\infty) \neq 0$.

Hinweis: Wegen $f(\infty) \neq 0$ kann der Ansatz $f(z) = \frac{z+b}{cz+d}$ gemacht werden.

Aufgabe 7 (8 Punkte): Berechnen Sie das Wegintegral 2. Art $I = \oint_C f\, dz$ für

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

entlang des Randes $C := \partial V$ von

$$V = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\right\}.$$

Aufgabe 8 (9 Punkte): Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ f(x,y) = e^x \cos\ y + e^y \sin\ x\,.$$

(i) Zeigen Sie, dass f harmonisch ist.

(ii) Begründen Sie die Aussage "f kann Realteil einer holomorphen Funktion sein".

(iii) Bestimmen Sie einen Imaginärteil $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass

$$F(z) = f(x,y) + ig(x,y)$$

holomorph ist.

(iv) Schreiben Sie F als eine explizite Funktion von z, so dass

$$F(z) = f(x,y) + ig(x,y) \qquad (z = x + iy)\,.$$

Aufgabe 9 (7 Punkte): Berechnen Sie das Oberflächenintegral der Funktion

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3z \\ 5y \\ 2 \end{pmatrix}$$

auf der Oberfläche einer Kugel

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\right\}$$

mit dem Radius $r > 0$.
Hinweis: Beachten Sie $\sin^3 t = \sin t(1 - \cos^2 t)$ und $\cos^3 t = \cos t(1 - \sin^2 t)$.