Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. C. Rohde

Höhere Mathematik I–III **Diplomvorprüfung** **3. 3. 2008**

1. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
phys

Bitte unbedingt beachten:

- In dieser Klausur können bis zu **74 Punkte** erreicht werden.

Aufgabe 1 (8 Punkte):
Bestimmen Sie

a) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ mit Hilfe der Substitution $u=\sqrt{x}$,

$x=u^2,\ dx=2u\,du \Rightarrow \int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int\limits_0^\infty \frac{2u\,du}{u(1+u^2)} = 2\int\limits_0^\infty \frac{du}{1+u^2} = 2\arctan u\Big|_0^\infty = \pi$

b) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x)}$.

Partialbruchzerlegung: $\frac{1}{x^2(1+x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{1+x}$

Grenzwertmethode: $b = \frac{1}{1+x}\Big|_{x=0} = 1,\ c = \frac{1}{x^2}\Big|_{x=-1} = 1$

a bestimmt man schnell durch Einstzen eines Wertes, z. B. $x=1$: $\frac{1}{2} = a+1+\frac{1}{2} \Rightarrow a=-1$

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x)} = \int\limits_1^\infty \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x}\right) dx = \lim_{A\to\infty}\left(-\ln x + \ln(1+x) - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^A$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(\ln\frac{1+x}{x} - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^A = 0 - \ln 2 + 1 = 1 - \ln 2$$

Gesamt: 8 P

Aufgabe 2 (11 Punkte): Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3+\alpha & 1-\alpha & 0 \\ 1-\alpha & 3+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

a) Bestimmen Sie zum Eigenwert $\lambda = 4$ zwei Eigenvektoren $\vec{f_1}$ und $\vec{f_2}$ der Matrix A mit $\vec{f_1} \perp \vec{f_2}$.

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -1+\alpha & 1-\alpha & 0 \\ 1-\alpha & -1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{f} = \vec{0} \Rightarrow \vec{f_1} = (1,1,0)^T,\ \vec{f_2} = (0,0,1)^T$$

b) Geben Sie einen von $\vec{f_1}$ und $\vec{f_2}$ linear unabhängigen Eigenvektor $\vec{f_3}$ von A und den zugehörigen Eigenwert an.

$\vec{f_3} = \vec{f_1} \times \vec{f_2} = (1,-1,0)^T,\ A\vec{f_3} = (2+2\alpha)\vec{f_3} \Rightarrow \lambda_3 = 2+2\alpha$

c) Geben Sie eine Orthogonalmatrix S und eine Diagonalmatrix D an, so dass $S^T AS = D$ gilt.

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2+2\alpha \end{pmatrix}$$

d) Gegeben sei eine Schar von Quadriken durch

$$Q_\alpha : \quad (3+\alpha)x_1^2 + (3+\alpha)x_2^2 + (2-2\alpha)x_1x_2 + 4x_3^2 = 1\,.$$

i) Bestimmen Sie die Normalform dieser Quadriken bezüglich der Koordinaten $\vec{x} = S\vec{y}$.
Mit $\vec{x}^T A\vec{x} = 1$ und $\vec{x} = S\vec{y}$ ergibt sich
$4y_1^2 + 4y_2^2 + (2+2\alpha)y_3^2 = 1$.

ii) Für welches α ist Q_α eine Kugel? $\alpha = 1$

iii) Geben Sie den Typ von Q_{-1} an: $4y_1^2 + 4y_2^2 = 1 \rightarrow$ Kreiszylinder

e) Wie lautet die Gleichung der Ebene $x_1 = 1$ im $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}-$System?

$$(1,0,0) \cdot (x_1,x_2,x_3)^T = 1 \overset{\vec{x}=S\vec{y}}{\Longrightarrow} (1,0,0)S \cdot \vec{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) \cdot \vec{y} = 1 \Rightarrow y_1 + y_3 = \sqrt{2}$$

$\boxed{\textbf{Gesamt: 11 P}}$

Aufgabe 3 (10 Punkte): Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = (1 - x^2)e^{-x^2}$.

a) **Symmetrie:** Es gilt $f(-x) = f(x)$, also Achsensymmetie zur y-Achse.

Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0$, die Nullstellen sind also ± 1.

Extremstellen:

Es gilt $f'(x) = ((1 - x^2) \cdot (-2x) - 2x)e^{-x^2} = (-4x + 2x^3)e^{-x^2} = 2x(x^2 - 2)e^{-x^2}$.

Als Extremstellen kommen somit 0 und $\pm\sqrt{2}$ in Frage.

Nun kann man mit Vorzeichenwechsel argumentieren oder mit der zweiten Ableitung $f''(x) = (-4x^4 + 14x^2 - 4)e^{-x^2}$, $f''(0) = -4 < 0$, $f''(\pm\sqrt{2}) = (-16 + 28 - 4)e^{-2} > 0$. Die Funktion f besitzt somit an der Stelle 0 ein lokales Maximum und an den Stellen $\pm\sqrt{2}$ lokale Minima.

b)

Es gilt $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, da $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = 0$ und $\lim_{x\to\pm\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$ wegen $\lim_{y\to\infty} ye^{-y} = 0$.

c) Entwickeln Sie die Funktion f in eine Potenzreihe um $x_0 = 0$.

$$f(x) = (1 - x^2)e^{-x^2} = (1 - x^2)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n-1)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}\right) x^{2n}$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n}{n!} x^{2n}$$

$\boxed{\textbf{Gesamt: 10 P}}$

Aufgabe 4 (8 Punkte): Bestimmen Sie das Minimum der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto 4\,x^2 + z$$

auf der Schnittkurve des parabolischen Zylinders $\mathcal{Z} : x + y^2 = 0$ und der Ebene $\mathcal{E} : 2y - z = 1$.

Lagrangefunktion: $L(x, y, z, \lambda, \mu) = 4x^2 + z + \lambda\,(x + y^2) + \mu\,(2y - z - 1)$

Notwendige Bedingung für Extrema: $L_x = L_y = L_z = 0$ und $L_\lambda = L_\mu = 0$ (Nebenbedingungen).

$$\begin{aligned} &L_z = 1 - \mu = 0,\ L_y = 2\lambda y + 2\mu = 0,\ L_x = 8x + \lambda = 0 \\ \Longrightarrow\quad &\mu = 1,\ \lambda y = -1\,(\rightsquigarrow y \neq 0!),\ 8x = -\lambda \\ \Longrightarrow\quad &\lambda = -\frac{1}{y},\ x = \frac{1}{8y}. \end{aligned}$$

Zusammen mit den Nebenbedingungen folgt daraus

$$x = \frac{1}{8y} \quad \text{und} \quad x + y^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y^2 = -\frac{1}{8y} \Longrightarrow y = -\frac{1}{2} \Longrightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

$$y = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \mathcal{E} : 2y - z = 1 \quad \Longrightarrow \quad z = -2$$

Als Kandidaten für das Extrema haben wir also den Punkt $P(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -2)$. f nimmt in P den Wert $4\,\frac{1}{4^2} - 2 = -\frac{7}{4}$ an (Nachweis, dass ein Minimum vorliegt, wird nicht verlangt).

$\boxed{\textbf{Gesamt: 8 P}}$

Aufgabe 5 (7 Punkte):

$$\begin{aligned}\ddot{u}(x) &= \frac{1}{4(\dot{u}(x))^3}\,, \quad x \in (0,1)\\ \dot{u}(0) &= 0\\ u(1) &= 0.\end{aligned}$$

Lösung:

Substitution $y(x) = \dot{u}(x)$

$$\begin{aligned}y'(x) &= \frac{1}{4y^3(x)}\\ y(0) &= 0.\end{aligned}$$

Trennung der Variablen:

$$g(x) = 1 \implies G(x) = \int_0^x d\zeta = x$$

$$h(y) = 4y^3 \implies H(y) = \int_0^y 4\zeta^3 d\zeta = y^4.$$

$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \qquad H^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\,, \qquad H^{-1}(x) = \pm\sqrt[4]{x}.$

$\implies y(x) = H^{-1}(G(x) + H(0)) = \pm\sqrt[4]{x}.$

$$\begin{aligned}\implies \dot{u}(x) = \pm\sqrt[4]{x} \implies u(x) &= \pm\left(C + \int_0^x \zeta^{\frac{1}{4}} d\zeta\right)\\ &= \pm\left(C + x^{\frac{5}{4}} \cdot \frac{4}{5}\right).\end{aligned}$$

$$0 = u(1) = \pm\left(C + \frac{4}{5}\right) \implies C = \pm\frac{4}{5}.$$

$$\implies u(x) = \mp\frac{4}{5} \pm \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}\,, \quad u : (0,1) \to \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 6 (6 Punkte): Wegen $f(\infty) \neq 0$ kann man den Ansatz

$$f(z) = \frac{z+b}{cz+d}$$

machen. Es gilt

$$f(0) = 3,\ f(1) = \frac{4}{3},\ f(i) = 1-i.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}&3 = \frac{b}{d}, \quad \frac{4}{3} = \frac{1+b}{c+d}, \quad 1-i = \frac{i+b}{ci+d}\\ &4c+4d = 3+3b, \quad 3d = b, \quad (1-i)(ci+d) = i+b\end{aligned}$$

Einsetzen der 2. Gleichung in die 1. und 3. Gleichung liefert

$$\left.\begin{array}{r}4c-5d = 3\\ (1+i)c-(2+i)d = i\end{array}\right| \begin{array}{c}\cdot(1+i)\\ \cdot(-4)\end{array}.$$

Addition liefert nun

$$(-5i-5+8+4i) = 3+3i-4i \iff (3-i)d = 3-i \iff d = 1.$$

Einsetzen liefert

$$3d = b \Longrightarrow b = 3$$

und

$$4c+4d = 3+3b \Longrightarrow 4c+4 = 3+9 = 12 \Longrightarrow c = 2.$$

Damit ist

$$f(z) = \frac{z+3}{2z+1}.$$

Aufgabe 7 (8 Punkte): 1. Lösungsweg:
Der Rand kann in 4 Teile C_1, C_2, C_3, C_4 zerlegt werden, diese werden durch

$$\begin{aligned} C_1(t) &= (1, -1+t)^T &:& \quad t \in [0,2] \\ C_2(t) &= (1-(t-2), 1)^T &:& \quad t \in [2,4] \\ C_3(t) &= (-1, 1-(t-4))^T &:& \quad t \in [4,6] \\ C_4(t) &= (-1+(t-6), -1)^T &:& \quad t \in [6,8] \end{aligned}$$

aufeinanderfolgend parametrisiert.
Anmerkung: Die Parametrisierung

$$\begin{aligned} C_1(t) &= (1-2t, 1)^T &:& \quad t \in [0,1] \\ C_2(t) &= (-1, 1-2t)^T &:& \quad t \in [0,1] \\ C_3(t) &= (-1+2t, -1)^T &:& \quad t \in [0,1] \\ C_4(t) &= (1, -1+2t)^T &:& \quad t \in [0,1] \end{aligned}$$

ist auch O.K.
Es gilt

$$\oint_C \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \sum_i \int_{C_i} \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Die Tangentialvektoren an die Parametrisierungen sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ an } C_1, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ an } C_2, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ an } C_3, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ an } C_4$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(x(s))\,ds &= \int_0^2 \frac{1}{1+(t-1)^2}\,dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{1+s^2}\,ds = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ebenso sind

$$\begin{aligned} \int_{C_2} f(x(s))\,ds &= \int_2^4 \frac{1}{1+(1-(t-2))^2}\,dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{1+s^2}\,ds = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \\ \int_{C_3} f(x(s))\,ds &= \int_4^6 \frac{1}{1+(1-(t-4))^2}\,dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{1+s^2}\,ds = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \\ \int_{C_4} f(x(s))\,ds &= \int_6^8 \frac{1}{1+(-1+(t-6))^2}\,dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{1+s^2}\,ds = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\oint_C \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = 4\frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

2.Lösungsweg

Da $\nabla \times f(x) = 0$ für $x \neq 0$ kann der Verlauf des Weges geändert werden, solange die Kurve einmal um den Nullpunkt läuft. Das heißt

$$\oint_C \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \oint_K \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

wobei

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

der Einheitskreis ist. Er wird durch

$$s : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad s(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

parametrisiert. Für den Tangentialvektor im Punkt θ gilt

$$t(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \oint_K \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} &= \int_0^{2\pi} f(\theta) \cdot t(\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)\right] d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 8 (9 Punkte):

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ f(x,y) = e^x \cos\ y + e^y \sin\ x$$

(i) f ist harmonisch:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x \cos\ y - e^y \sin\ x - e^x \cos\ y + e^y \sin\ x = 0\,.$$

(ii) Da f stetig differenzierbar und harmonisch ist, ist es der Realteil einer holomorphen Funktion.

(iii) Finde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,, so dass $F(z) = f(x,y) + ig(x,y)$ holomorph ist.

Cauchy-Riemannsche Gleichungen:

$$(*) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\ , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \qquad (**)$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = e^x \cos\ y + e^y \cos\ x \Longrightarrow g(x,y) = e^x \sin\ y + e^y \cos\ x + C(x).$$

$$\begin{aligned}
\overset{(**)}{\Longrightarrow} \quad & -e^x \sin\ y + e^y \sin\ x = -e^x \sin\ y + e^y \sin\ x - C'(x) \\
\Longrightarrow \quad & C'(x) = 0 \quad \Longrightarrow C(x) = K \quad \text{(Konstante)} \\
\Longrightarrow \quad & g(x,y) = e^x \sin\ y + e^y \cos\ x + K.
\end{aligned}$$

Anmerkung: Es ist nicht notwendig K hinzuschreiben. Spezialfälle, wie z.B. $K = 0$, reichen auch.

(iv)

$$\begin{aligned}
F(z) &= e^x \cos\ y + e^y \sin\ x + i(e^x \sin\ y + e^y \cos\ x) + iK \\
&= e^x(\cos\ y + i \sin\ y) + e^y(\sin\ x + i \cos\ x) + iK \\
&= e^x \cdot e^{iy} + ie^y(\cos\ x - i \sin\ x) + iK \\
&= e^z + ie^y \cdot e^{-ix} + iK \\
&= e^z + ie^{-zi} + iK.
\end{aligned}$$

Aufgabe 9 (7 Punkte): Berechnen Sie das Oberflächenintegral der Funktion

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3z \\ 5y \\ 2 \end{pmatrix}$$

auf der Oberfläche einer Kugel

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

mit dem Radius $r > 0$.
Wir benutzen folgende Parametrisierung einer Kugel:

$$\omega(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\psi \\ r\sin\varphi\cos\psi \\ r\sin\psi \end{pmatrix}, \quad \psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ \varphi \in [-\pi, \pi].$$

also gilt

$$\omega_\varphi(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi\cos\psi \\ r\cos\varphi\cos\psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega_\psi(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} -r\cos\varphi\sin\psi \\ -r\sin\varphi\sin\psi \\ r\cos\psi \end{pmatrix}.$$

und damit auch

$$\begin{aligned}
(\omega_\varphi \times \omega_\psi)(\varphi,\psi) &= \begin{pmatrix} \omega_{\varphi,2}\omega_{\psi,3} - \omega_{\varphi,3}\omega_{\psi,2} \\ \omega_{\varphi,3}\omega_{\psi,1} - \omega_{\varphi,1}\omega_{\psi,3} \\ \omega_{\varphi,1}\omega_{\psi,2} - \omega_{\varphi,2}\omega_{\psi,1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\psi r\cos\psi \\ -(-r)\sin\varphi\cos\psi \cdot r\cos\psi \\ -r\sin\varphi\cos\psi \cdot (-r)\sin\varphi\sin\psi - r\cos\varphi\cos\psi \cdot (-r)\cos\varphi\sin\psi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r^2\cos\varphi\cos^2\psi \\ r^2\sin\varphi\cos^2\psi \\ r^2\cos\psi\sin\psi \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Mit $F = \begin{pmatrix} 3z \\ 5y \\ 2 \end{pmatrix}$ und $r > 0$ folgt

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\omega(\varphi,\psi))\cdot(\omega_\varphi\times\omega_\psi)(\varphi,\psi)\,d\psi\,d\varphi\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\begin{pmatrix}3r\sin\psi\\ 5r\sin\varphi\cos\psi\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r^2\cos\varphi\cos^2\psi\\ r^2\sin\varphi\cos^2\psi\\ r^2\cos\psi\sin\psi\end{pmatrix}d\psi\,d\varphi\\
&= r^2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3r\sin\psi\cos^2\psi\cos\varphi + 5r\sin^2\varphi\cos^3\psi + 2\cos\psi\sin\psi\,d\psi\,d\varphi\\
&= r^2\int_{-\pi}^{\pi}\left[-r\cos\varphi\cos^3\psi + 5r\sin^2\varphi(\sin\psi - \frac{1}{3}\sin^3\psi) + \sin^2\psi\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\\
&= r^2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{20}{3}r\sin^2\varphi\,d\varphi\\
&= \frac{20}{3}r^3\left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]_{-\pi}^{\pi}\\
&= \frac{20}{3}\pi r^3.
\end{aligned}
$$

2. Lösungsweg Die Aufgabe läßst sich auch mit dem Satz von Gauß lösen. Es gilt also

$$\int_{\partial K} F\cdot n\,dS = \int_K \mathrm{div}F\,dx\,dy\,dz.$$

Es gilt

$$\mathrm{div}F = 5.$$

Also folgt

$$\int_{\partial K} F\cdot n\,dS = \int_K 5\,dx\,dy\,dz = 5\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{20}{3}\pi r^3.$$