Höhere Mathematik I–III **Diplomvorprüfung** **4. 3. 2008**

2. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
phys

Bitte unbedingt beachten:

- In dieser Klausur können bis zu **73 Punkte** erreicht werden.

Aufgabe 1 (8 Punkte): Für fest gewählten Parameter $a > 0$ sei die Funktion f_a definiert durch

$$f_a(t) := \sqrt{\frac{1}{a^2} - t} \quad \left(t \leq \frac{1}{a^2}\right).$$

a) Berechnen Sie für f_a das eindimensionale Taylorpolynom der Ordnung 2 um den Punkt $t = 0$ in Abhängigkeit des Parameters a.

Die ersten zwei Ableitungen von f_a sind

$$f_a'(t) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} - t\right)^{-1/2} \quad \text{und} \quad f_a''(t) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2} - t\right)^{-3/2}.$$

Damit folgt für das gesuchte Taylorpolynom der Ordnung 2

$$T_2(t) = f_a(0) + f_a'(0) \cdot t + \frac{1}{2} f_a''(0) \cdot t^2 = \frac{1}{a} - \frac{1}{2}\,a\,t - \frac{1}{8}\,a^3\,t^2.$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) für die Funktion

$$g(x,y) = f_2(y) \cdot \frac{1 + f_1(x)}{x} \quad \left(x \leq 1, y \leq \frac{1}{4}\right)$$

das zweidimensionale Taylorpolynom der Ordnung 1 an der Stelle $(x,y) = (0,0)$.

Mit a) folgt für die ersten Glieder der eindimensionalen Taylorpolynome von f_1 und f_2 um $x = 0$ bzw. $y = 0$

$$T^{f_1}(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{8}\,x^2 \quad \text{und} \quad T^{f_2}(y) = \frac{1}{2} - y \quad \left(\text{bzw. } \frac{1}{2} - y - y^2\right).$$

Damit ergibt sich für die ersten Glieder des Taylorpolynoms von g um $(0,0)$

$$\begin{aligned} T^g(x,y) &= T^{f_2}(y) \cdot \frac{1+T^{f_1}(x)}{x} = \left(\frac{1}{2}-y\right) \cdot \frac{1-(1-\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{8}\,x^2)}{x} \\ &= \left(\frac{1}{2}-y\right) \cdot \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}x\right) \end{aligned}$$

Das gesuchte zweidimensionale Taylorpolynom der Ordnung 1 ist also

$$T_1(x,y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\,x - \frac{1}{2}\,y.$$

$\boxed{\textbf{Gesamt: 8 P}}$

Aufgabe 2 (9 Punkte):

a) B ist obere Dreiecksmatrix $\Longrightarrow$ Eigenwerte sind die Diagonaleinträge 1, 1, -1, 0.

b)
- Eigenvektor zum Eigenwert 0 :

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

- Eigenvektor zum Eigenwert -1 :

$$B + E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Eigenvektoren zum Eigenwert 1 :

$$B - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass zum doppelten Eigenwert 1 nur einen Eigenvektor, nämlich

$$v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

existiert. Es ist also noch ein Hauptvektor zu berechnen.

- Hauptvektor v_4 zum Eigenwert 1 und Eigenvektor v_3 :

$$(B - E)\, v_4 = v_3 \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right),$$

d.h. zum Beispiel

$$v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(v_4 nur eindeutig bis auf die homogene Lösung, also Vielfache von v_3).

c) Aus a) und b) folgt: Die Jordan-Normalform von B ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gesamt: 9 P

Aufgabe 3 (10 Punkte):

a) Da $1+i$ Nullstelle des reellen Polynoms p ist, ist auch $1-i$ Nullstelle. Somit kann man p durch $(z-1-i)(z-1+i) = z^2-2z+2$ teilen.

Polynomdivision ergibt $p(z) = (z^2-2z+2)(z^2-5z+6)$.

Mit Hilfe der Mitternachtsformel berechnet man als Nullstellen von z^2-5z+6 die Werte 2 und 3 und erhält

i) die reelle irreduzible Zerlegung

$$p(z) = (z^2-2z+2)(z-2)(z-3),$$

ii) die komplexe irreduzible Zerlegung

$$p(z) = (z-1-i)(z-1+i)(z-2)(z-3).$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{2+i}{1-2i} &= \frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2+i+4i-2}{1+4} = i \\ z &= i^3 \cdot (1+i) = -i(1+i) = -i+1 \end{aligned}$$

i) $z = 1-i$.

ii) $z = \sqrt{2}e^{\frac{7}{4}\pi i}$. ($r = |1-i| = \sqrt{2}$, $\tan\varphi = \frac{y}{x} = -1 \Rightarrow \varphi = \frac{3}{4}\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$)

$\boxed{\textbf{Gesamt: 10 P}}$

Aufgabe 4 (11 Punkte):

$$v(x) = h(x_1 + x_2 + x_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3 = 0.$$

Substitution: $u := x_1 + x_2 + x_3$.

(a)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial x_1} &= h'(u)x_1 + h(u) \\
\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} &= h''(u)x_1 + 2h'(u) \\
\frac{\partial v_1}{\partial x_2} &= h'(u)x_1 \\
\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} &= h''(u)x_1 \\
\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} &= h''(u)x_1.
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned}
\Delta v_1 &= 3h''(u)x_1 + 2h'(u) \\
\Delta v_2 &= 3h''(u)x_2 + 2h'(u) \\
\Delta v_3 &= 3h''(u)x_3 + 2h'(u).
\end{aligned}$$

(b)

$$\Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3 = 3h''(u)u + 6h'(u).$$

$$\Longrightarrow h''(u) = -\frac{2}{u}h'(u), \qquad h(1) = 1\,,\ h'(1) = 1.$$

Substitution $h'(u) = y(u)$.

$$\Longrightarrow \dot{y}(u) = -\frac{2}{u}y(u) \qquad y(1) = 1.$$

Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned}
g(u) &= -\tfrac{2}{u} \Longrightarrow G(u) = -2\ln u \\
H(y) &= \tfrac{1}{y} \Longrightarrow H(y) = \int\limits_1^y \tfrac{1}{\zeta}d\zeta = \ln y
\end{aligned}$$

$$H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad H^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \quad H^{-1}(y) = e^y$$

$$\Longrightarrow y(u) = \mathcal{H}^{-1}(-2\ln u) = e^{-2\ln u} = \frac{1}{u^2}, \qquad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$$

$$\Longrightarrow h'(u) = \frac{1}{u^2}, \qquad h(1) = 1.$$

$$\Longrightarrow h(u) = 2 - \frac{1}{u}, \qquad h : [1, \infty) \to \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5 (10 Punkte): Es gilt

$$\frac{1}{4+x^4} = \frac{1}{(x^2+2i)(x^2-2i)} = \frac{1}{(x-1-i)(x+1-i)(x-1+i)(x+1+i)}.$$

Da der Grad des Nenners $n = 4$ und der Grad des Zählers $m = 0$ ist, gilt $n \geq m+2$. Aus der Vortragsübung ist bekannt, dass daher

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^4} = 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{1}{4+z^4}, 1+i\right) + 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{1}{4+z^4}, -1+i\right) \\
= \; & 2\pi i \lim_{z\to 1+i} \frac{1}{(z+1-i)(z-1+i)(z+1+i)} \\
& +2\pi i \lim_{z\to -1+i} \frac{1}{(z-1-i)(z-1+i)(z+1+i)} \\
= \; & \frac{2\pi i}{(1+i+1-i)(1+i-1+i)(1+i+1+i)} \\
& +\frac{2\pi i}{(-1+i-1-i)(-1+i-1+i)(-1+i+1+i)} \\
= \; & \frac{2\pi i}{2(2i)(2+2i)} + \frac{2\pi i}{(-2)(-2+2i)(2i)} \\
= \; & \frac{\pi}{4+4i} + \frac{\pi}{4-4i} \\
= \; & \frac{\pi(4-4i)+\pi(4+4i)}{16+16} \\
= \; & \frac{8\pi}{32} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (9 Punkte): Parametrisieren Sie folgende Fläche:

(a) $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 6y^2 = z, z \in [0, h]\right\}, \ h \in \mathbb{R},\ h > 0.$

$$\omega(\varphi, r) = \begin{pmatrix} \sqrt{r}\cos\varphi \\ \sqrt{\frac{r}{6}}\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} \qquad \varphi \in [0, 2\pi),\ r \in [0, h].$$

(b) Ferner gilt:

$$\omega_\varphi(\varphi, r) = \begin{pmatrix} -\sqrt{r}\sin\varphi \\ \sqrt{\frac{r}{6}}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega_r(\varphi, r) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\varphi \\ \frac{1}{2\sqrt{6r}}\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt dann:

$$\begin{aligned}
\omega_\varphi \times \omega_r &= \begin{pmatrix} \omega_{\varphi,2}\omega_{r,3} - \omega_{\varphi,3}\omega_{r,2} \\ \omega_{\varphi,3}\omega_{r,1} - \omega_{\varphi,1}\omega_{r,3} \\ \omega_{\varphi,1}\omega_{r,2} - \omega_{\varphi,2}\omega_{r,1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{r}{6}}\cos\varphi \\ \sqrt{r}\sin\varphi \\ -\sqrt{r}\sin\varphi\, \frac{1}{2\sqrt{6r}}\sin\varphi - \sqrt{\frac{r}{6}}\cos\varphi \frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{r}{6}}\cos\varphi \\ \sqrt{r}\sin\varphi \\ -\frac{1}{2\sqrt{6}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Andererseits gilt: $\omega(\frac{\pi}{2}, \frac{h}{2}) = \left(0, \sqrt{\frac{h}{12}}, \frac{h}{2}\right)$. Also folgt:

$$\begin{aligned}
n\left(0, \sqrt{\frac{h}{12}}, \frac{h}{2}\right) &= \frac{\omega_\varphi \times \omega_r(\frac{\pi}{2}, \frac{h}{2})}{\left|\omega_\varphi \times \omega_r(\frac{\pi}{2}, \frac{h}{2})\right|} \\
&= \sqrt{\frac{24}{12h+1}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{h}{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{12h+1}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{h}{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{6}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7 (8 Punkte): Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2\,(n+1) - \sqrt{4\,n^2 + n - 2}\right) = \boxed{\tfrac{7}{4}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\dfrac{(3\,n+1)\,(n-1)}{(3\,n-1)\,(n+1)} - 1\right) = \boxed{-\tfrac{4}{3}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + 3\,x)^{\frac{2}{x}} = \boxed{e^6}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,\sin(x)}{1 - \cos(x)} = \boxed{2}$

Gesamt: 8 P

Aufgabe 8 (8 Punkte):

a) Welche der folgenden Reihen sind konvergent?
Antworten Sie nur mit 'j' für 'ja' bzw. 'n' für 'nein'. Beachten Sie, dass in dieser Teilaufgabe für falsche Antworten negative Punkte vergeben werden.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$
j	j	n	j

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?
Geben Sie den **maximalen** Konvergenzbereich an.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+x)^n}{n2^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(4+\sqrt{n})^n}$
$-3 \leq x < 1$	$x \in \mathbb{R}$

Gesamt: 8 P