Lösungsvorschläge zur Klausur

für mach, umw, fmt, bau, immo, tema, und zugehörige Technikpädagogik

Aufgabe 1: *(14 Punkte)*
Mittels der Funktion

$$f\colon [-1,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}^3\colon (u,v)\mapsto(-u^2,-u+v,u+v)$$

wird ein Flächenstück S im Raum parametrisiert. Sei weiter

$$g\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\colon (x,y,z)\mapsto(0,0,y^2)$$

ein Vektorfeld.
Bestimmen Sie:

$$\iint_S (\operatorname{rot} g)\bullet n\,dO$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Lösungsweg 1: direkt

$$\iint_S (\operatorname{rot} g)\bullet n\,dO = \iint_{\bar I} (\operatorname{rot} g)(f(u,v))\bullet\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right)du\,dv$$

mit $\bar I = [-1,1]\times[0,1]$. (Verzerrungsfaktor und Normierungsfaktor für n heben sich weg). Hier:

$$\operatorname{rot} g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial y}-\frac{\partial g_2}{\partial z}\\ \frac{\partial g_1}{\partial z}-\frac{\partial g_3}{\partial x}\\ \frac{\partial g_2}{\partial x}-\frac{\partial g_1}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2y\\0\\0\end{pmatrix}$$

Also gilt mit den Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}
\iint_S (\operatorname{rot} g)\bullet n\,dO &= \int_0^1\int_{-1}^1 \begin{pmatrix}2(v-u)\\0\\0\end{pmatrix}\bullet\left(\begin{pmatrix}-2u\\-1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)du\,dv\\
&= \int_0^1\int_{-1}^1 \begin{pmatrix}2(v-u)\\0\\0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-2\\2u\\-2u\end{pmatrix}du\,dv\\
&= \int_0^1\int_{-1}^1 (-4(v-u))\,du\,dv\\
&= \int_0^1 \left[-4uv+2u^2\right]_{-1}^1 dv = \int_0^1(-8v)\,dv = -4.
\end{aligned}$$

Lösungsweg 2: mit dem Satz von Stokes

$$\iint_S (\operatorname{rot} g) \bullet n \, dO = \int_{f(K)} g(s)\, ds = \int_0^6 g(f(C(t)) \bullet (f \circ C)'(t)\, dt$$

Hierbei ist K die Randkurve von $\bar{I} = [-1,1] \times [0,1]$ und

$$C : [0,6] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{cases} (1,t) & t \in [0,1) \\ (2-t,1) & t \in [1,3) \\ (-1,4-t) & t \in [3,4) \\ (t-5,0) & t \in [4,6) \end{cases} \qquad f(u,v) = \begin{pmatrix} -u^2 \\ -u+v \\ u+v \end{pmatrix}$$

Die mathematisch positive Umlaufrichtung ergibt sich, da das umrandete Gebiet I auf der linken Seite liegen soll. (Eine einzelne Parametrisierung der vier Randstücke ist ebenfalls zulässig, jedoch muss hier jeweils auf die korrekte Orientierung geachtet werden.) Wir erhalten nun

$$f(C(t))) = \begin{cases} (-1,t-1,t+1)^T & t \in [0,1) \\ (-(t-2)^2, t-1, 3-t)^T & t \in [1,3) \\ (-1, 5-t, 3-t)^T & t \in [3,4) \\ (-(t-5)^2, 5-t, t-5)^T & t \in [4,6) \end{cases}$$

$$(f \circ C)'(t) = \begin{cases} (0,1,1)^T & t \in [0,1) \\ (2(2-t),1,-1)^T & t \in [1,3) \\ (0,-1,-1)^T & t \in [3,4) \\ (2(5-t),-1,1)^T & t \in [4,6) \end{cases}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\iint_S (\operatorname{rot} g) \bullet n \, dO &= \int_0^6 g(f(C(t)) \bullet (f \circ C)'(t)\, dt \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (t-1)^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt + \int_1^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (t-1)^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2(2-t) \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} dt \\
&\quad + \int_3^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (t-5)^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} dt + \int_4^6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (t-5)^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2(5-t) \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^1 (t-1)^2\, dt - \int_1^3 (t-1)^2\, dt - \int_3^4 (t-5)^2\, dt + \int_4^6 (t-5)^2\, dt \\
&= -\left[\frac{1}{3}(1-t)^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}(1-t)^3\right]_1^3 - \left[\frac{1}{3}(t-5)^3\right]_3^4 + \left[\frac{1}{3}(t-5)^3\right]_4^6 \\
&= -0 + \frac{1}{3} - \frac{8}{3} - 0 + \frac{1}{3} - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\
&= -4.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: *(23 Punkte)*
Gegeben ist das folgende Differentialgleichungssystem:

$$Y' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 4e^x \\ 2e^x \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den Lösungsraum.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
Fundamentalsystem zum homogenen System nach 14.2:
Sei $x_0 := 0$; wir wählen b^1 als ersten Einheitsvektor:

$$b^1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Ab^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A^2 b^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

b^1, Ab^1 sind linear unabhängig. b^1, Ab^1, A^2b^1 müssen linear abhängig sein. Mit Gauß-Elimination oder durch Hinschauen erhält man:

$$A^2b^1 - 2Ab^1 + 5b^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die zugehörige Differentialgleichung höherer Ordnung lautet $y'' - 2y' + 5y = 0$ mit den Anfangswerten $f_j(0) = b_j^1$, $f_j'(0) = (Ab^1)_j$, $j = 1, 2$. Das entsprechende Polynom ist

$$p(\xi) = \xi^2 - 2\xi + 5$$

mit den komplexen Nullstellen $1 \pm 2\imath$. Folglich ergibt sich das Fundamentalsystem

$$e^x \cos(2x), \quad e^x \sin(2x).$$

Nach 12.10 Zusatz 2 sind die Lösungen des obigen AWP gegeben durch

$$f_j = r_1^j e^x \cos(2x) + r_2^j e^x \sin(2x) \quad \text{mit} \quad M(0) \begin{pmatrix} r_1^j \\ r_2^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_j^1 \\ (Ab^1)_j \end{pmatrix}$$

$$M(0) = \left.\begin{pmatrix} e^x \cos(2x) & e^x \sin(2x) \\ e^x \cos(2x) - 2e^x \sin(2x) & e^x \sin(2x) + 2e^x \cos(2x) \end{pmatrix}\right|_{x=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauß}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

also $f_1^1 = e^x(\cos(2x) + \sin(2x))$, $f_2^1(x) = e^x \sin(2x)$ und damit nach 14.2:

$$f^1(x) = \begin{pmatrix} e^x(\cos(2x) + \sin(2x)) \\ e^x \sin(2x) \end{pmatrix}.$$

Um den zweiten Vektor für das Fundamentalsystem zu bekommen, gibt es zwei Möglichkeiten:

a) Da b^1, Ab^1 linear unabhängig sind, können wir $b^2 := Ab^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ wählen und bekommen

$$f^2(x) = Af^1(x) = (f^1)'(x) = \begin{pmatrix} e^x(3\cos(2x) - \sin(2x)) \\ e^x(2\cos(2x) + \sin(2x)) \end{pmatrix}$$

b) Für ein normiertes Fundamentalsystem wählen wir b^2 als den zweiten Einheitsvektor und verfahren wie oben:

$$b^2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Ab^2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A^2b^2 = \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Mit Gauß-Elimination oder durch Hinschauen erhält man

$$A^2b^2 - 2Ab^2 + 5b^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

was auf die selbe Dgl. höherer Ordnung wie oben führt. Entsprechend erhalten wir

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \end{array}\right) \quad \xrightarrow{\text{Gauß}} \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

also $f_1^2 = -2e^x \sin(2x)$, $f_2^2(x) = e^x(\cos(2x) - \sin(2x))$

$$f^2(x) = \begin{pmatrix} -2e^x \sin(2x) \\ e^x(\cos(2x) - \sin(2x)) \end{pmatrix}.$$

Partikuläre Lösung des inhomogenen Systems durch Variation der Konstanten:
Wir verwenden den Ansatz

$$\hat{f}_p(x) = c_1(x)f^1(x) + c_2(x)f^2(x) \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = M(x)^{-1} \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{pmatrix}$$

a) Für das Fundamentalsystem aus a) müssen wir 14.11(d) verwenden um die Inverse der Wronski-Matrix

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^x(\cos(2x) + \sin(2x)) & e^x(3\cos(2x) - \sin(2x)) \\ e^x \sin(2x) & e^x(2\cos(2x) + \sin(2x)) \end{pmatrix}$$

des Systems zu berechnen. Mit $M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $M(0)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} M(x)^{-1} &= M(0)^{-1}M(-x)M(0)^{-1} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-x}(\cos(2x) - \sin(2x)) & e^{-x}(3\cos(2x) + \sin(2x)) \\ -e^{-x}\sin(2x) & e^{-x}(2\cos(2x) - \sin(2x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{-x}(2\cos(2x) + \sin(2x)) & e^{-x}(-6\cos(2x) + 4\sin(2x)) \\ -2e^{-x}\sin(2x) & 2e^{-x}(\cos(2x) + \sin(2x)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{-x}(2\cos(2x)+\sin(2x)) & e^{-x}(-6\cos(2x)+4\sin(2x)) \\ -2e^{-x}\sin(2x) & 2e^{-x}(\cos(2x)+sin(2x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4e^x \\ 2e^x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(2x)+3\sin(2x) \\ \cos(2x)-\sin(2x) \end{pmatrix}.$$

Integration liefert

$$c_1(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{3}{2}\cos(2x)$$
$$c_2(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x).$$

Eingesetzt in den Ansatz folgt

$$\hat{f}_p(x) = \frac{1}{2}e^x \begin{pmatrix} (\sin(2x)-3\cos(2x))(\cos(2x)+\sin(2x)) \\ (\sin(2x)-3\cos(2x))\sin(2x) \end{pmatrix}$$
$$+\frac{1}{2}e^x \begin{pmatrix} (\sin(2x)+\cos(2x))(3\cos(2x)-\sin(2x)) \\ (\sin(2x)+\cos(2x))(2\cos(2x)+\sin(2x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}$$

b) Hier ergibt sich die Inverse einfach aus

$$M(x)^{-1} = M(-x) = \begin{pmatrix} e^{-x}(\cos(2x)-\sin(2x)) & 2e^{-x}\sin(2x)) \\ -e^{-x}\sin(2x) & e^{-x}(\cos(2x)+\sin(2x)), \end{pmatrix}$$

so dass wir folgendes erhalten:

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x}(\cos(2x)-\sin(2x)) & 2e^{-x}\sin(2x)) \\ -e^{-x}\sin(2x) & e^{-x}(\cos(2x)+\sin(2x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4e^x \\ 2e^x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4\cos(2x) \\ 2\cos(2x)-2\sin(2x) \end{pmatrix}$$

Integration:

$$c_1(x) = 2\sin(2x)$$
$$c_2(x) = \sin(2x)+\cos(2x).$$

Einsetzen:

$$\hat{f}_p(x) = e^x \begin{pmatrix} 2\sin(2x)(\cos(2x)+\sin(2x)) - (\sin(2x)+\cos(2x))2\sin(2x) \\ 2\sin(2x)\sin(2x) + (\sin(2x)+\cos(2x))(\cos(2x)-\sin(2x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems:
Es ergibt sich

$$\hat{f}(x) = r_1 f^1(x) + r_2 f^2(x) + \hat{f}_p(x)$$
$$= e^x \begin{pmatrix} r_1(\cos(2x)+\sin(2x)) - r_2 2\sin(2x) \\ r_1\sin(2x) + r_2(\cos(2x)-\sin(2x)) + 1 \end{pmatrix}$$

mit $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ beliebig.

Aufgabe 3: *(10 Punkte)*
Gegeben ist die Menge

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, y \leq x^2, y \leq -x+2\}$$

und die Funktion f durch $f(x,y) = x+y$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Bestimmen Sie:

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
Weil aus $y \geq 0$ und $y \leq -x+2$ folgt, dass $x \leq 2$, kann man B wie folgt als Normalbereich schreiben:

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \min\{x^2, -x+2\}\}\,.$$

Nach dem Satz von Fubini ist wegen $\min\{x^2, -x+2\} = \begin{cases} x^2 & x \in [0,1) \\ -x+2 & x \in [1,2) \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\iint_B f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \int_0^{x^2} (x+y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{-x+2} (x+y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2} dx + \int_1^2 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^{-x+2} dx \\
&= \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^4}{2}\right) dx + \int_1^2 \left(2x - x^2 + \frac{x^2}{2} - 2x + 2\right) dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{6} + 2x\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{10} - \frac{4}{3} + 4 + \frac{1}{6} - 2 = \frac{71}{60}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: *(13 Punkte)*
Gegeben ist das Vektorfeld:

$$g\colon (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix}$$

(a) Stellen Sie Phasen-Differentialgleichungssysteme auf und gewinnen Sie damit ein erstes Integral u auf $(\mathbb{R}^+)^2$.

(b) Bestimmen Sie die Integralkurven des durch g gegebenen autonomen Systems.

(c) Verifizieren Sie durch Einsetzen, dass in der Tat u ein erstes Integral ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(a) Die Phasen-Differentialgleichung lautet

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{g_1(x_1,x_2)}{g_2(x_1,x_2)} = \frac{4x_1}{x_2}.$$

Diese wird mittels Trennung der Veränderlichen gelöst:

$$\int \frac{1}{4x_1}\frac{dx_1}{dx_2}\,dx_2 = \int \frac{1}{x_2}\,dx_2,$$

$$\text{also} \qquad \frac{1}{4}\ln|x_1| = \ln|x_2| + const.$$

$$\text{also mit } x_1 > 0,\ x_2 > 0\text{:} \qquad \frac{x_1}{x_2^4} = const.$$

Mögliche erste Integrale sind damit die folgenden Funktionen:

$$u(x_1,x_2) = \ln x_1 - 4\ln x_2$$
$$v(x_1,x_2) = \frac{x_1}{x_2^4}$$

(b) Das zu g zugehörige autonome System lautet

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x_1(t),x_2(t)) \\ g_1(x_1(t),x_2(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1(t) \\ \frac{1}{2}x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Die Lösung dieses Systems liefert das Fundamentalsystem $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\frac{1}{2}t} \end{pmatrix}$, so dass die Integralkurven durch

$$\begin{pmatrix} r_1 e^{2t} \\ r_2 e^{\frac{1}{2}t} \end{pmatrix}$$

für $r_1, r_2 > 0$ gegeben sind.

(c)

$$u(x_1(t),x_2(t)) = \ln x_1 - 4\ln x_2 = \ln(r_1 e^{2t}) - \ln((r_2 e^{\frac{1}{2}t})^4) = \ln r_1 - \ln r_2^4$$
$$v(x_1(t),x_2(t)) = \frac{x_1(t)}{x_2(t)^4} = \frac{r_1 e^{2t}}{(r_2 e^{\frac{1}{2}t})^4} = \frac{r_1}{r_2^4}$$

also gilt sowohl $\frac{d}{dt}u(x_1(t),x_2(t)) = 0$ als auch $\frac{d}{dt}v(x_1(t),x_2(t)) = 0$.