Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{-3, -\frac{1}{3}\} \mapsto \mathbb{C} :\ f(z) = \dfrac{1}{3z^2+10z+3} = \dfrac{1}{(3z+1)(z+3)}$ .

**a)** Bestimmen Sie die Residuen von $f$.

Nullstellen: $z_1 = -3, z_2 = -\dfrac{1}{3}$

Mit $g(z) = 3z^2+10z+3$ und $g'(z) = 6z+10$, $\mathrm{Res}(\dfrac{1}{g(z)}, z_i) = \dfrac{1}{g'(z_i)}$ oder direkt:

$\mathrm{Res}(f,-3) = \dfrac{1}{-18+10} = -\dfrac{1}{8}$ oder $\dfrac{1}{3z+1}\Big|_{z=-3} = -\dfrac{1}{8}$,
$\mathrm{Res}(f,-\dfrac{1}{3}) = \dfrac{1}{-2+10} = \dfrac{1}{8}$ oder $\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{z+3}\Big|_{z=-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{8}$

**b)** Berechnen Sie $I(R) = \oint\limits_{|z|=R} f(z)\,dz$ für $R = \frac{1}{4}$ , 1, 4.

$I(\dfrac{1}{4}) = 0,\ I(1) = 2\pi i\left(\frac{1}{8}\right) = \dfrac{\pi}{4}\,i,\ I(4) = 2\pi i(-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}) = 0$

**c)** Berechnen Sie $J = \int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{5+3\cos x}$ mit Hilfe der Identität $\cos x = \dfrac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$
und der Substitution $z = e^{ix}$.

$$\frac{1}{5+\frac{3}{2}(e^{ix}+e^{-ix})} = \frac{2}{10+3(e^{ix}+e^{-ix})}\,.$$

Mit $z = e^{ix}$, $dz = ie^{ix}dx = izdx$, $dx = -\dfrac{i}{z}dz$

ergibt sich $J = \oint\limits_{|z|=1} \dfrac{-2i}{10+3(z+\dfrac{1}{z})}\,\dfrac{1}{z}\,dz = -2i \oint\limits_{|z|=1} \dfrac{dz}{3z^2+10z+3} = -2iI(1) = \dfrac{\pi}{2}$

$\boxed{\textbf{Gesamt: 7 P}}$

Gegeben sei die Fläche $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le 4\,,\ z = 4+2xy\}$ und das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,y \\ \frac{1}{2}\,x \\ 2+xy-\frac{1}{2}\,z \end{pmatrix}, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,.$$

**a)** Bestimmen Sie den nach oben weisenden Normalenvektor $\vec{n}$ von $D$ (in $xyz$-Koordinaten). Berechnen Sie damit den Flächeninhalt von $D$.

$$z = f(x,y) = 4+2xy \quad \Longrightarrow \quad \vec{n}(x,y) = \begin{pmatrix} -\partial x(4+2xy) \\ -\partial y(4+2xy) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ -2x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt für den Flächeninhalt von $D$ (mit Polarkoordinaten):

$$\begin{aligned} F(D) &= \iint_D \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dx\,dy = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} \sqrt{4r^2+1}\cdot r\,dr\,d\varphi \\ &= 2\pi\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=0}^{2} = \frac{\pi}{6}\cdot(17^{\frac{3}{2}}-1). \end{aligned}$$

**b)** Geben Sie eine Parametrisierung $\vec{r}$ der (bzgl. der $xy-$Ebene positiv orientierten) Randkurve $C$ von $D$ an und berechnen Sie direkt das Kurvenintegral $\int\limits_C \vec{v}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ längs $C$.

Parametrisierung:

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 4+8\cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

Kurvenintegral:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{v}(\vec{r})\cdot d\vec{r} &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin\varphi \\ 2\cos\varphi \\ 8\,(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi) \end{pmatrix} d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} 2\,d\varphi = 4\pi \end{aligned}$$

**c)** Bestätigen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes unter Berechnung des Flusses von $\operatorname{rot}\vec{v}$ von unten nach oben durch $D$ das Ergebnis aus c).

Es gilt:

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit dem Satz von Stokes folgt

$$\begin{aligned} \int_C \vec{v}(\vec{r})\cdot d\vec{r} &= \iint_D \operatorname{rot}\vec{v}\cdot\vec{n}\,dx\,dy \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} 1\cdot r\,dr\,d\varphi = 2\pi\cdot 2 = 4\pi \end{aligned}$$

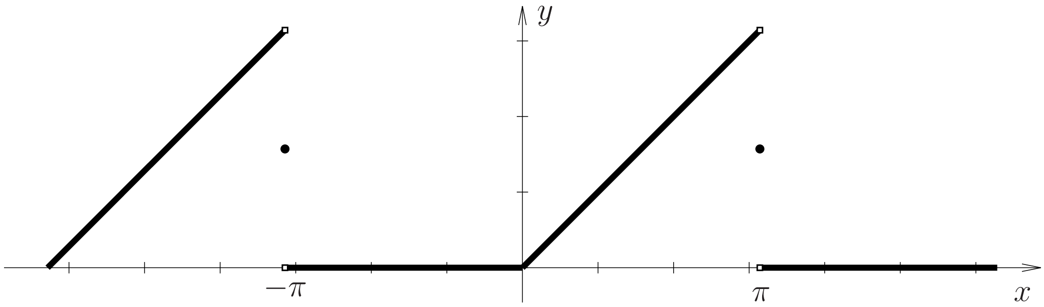
**Gesamt: 13 P**

Die Funktion $f$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für} \quad x = -\pi \\ 0 & \text{für} \quad -\pi < x < 0 \\ x & \text{für} \quad 0 \le x < \pi \\ \frac{\pi}{2} & \text{für} \quad x = \pi \end{cases}$$

werde $2\pi$–periodisch fortgesetzt.

**a)** Skizzieren Sie den Graphen von $f$ im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.




**b)** $f$ soll in eine Fourierreihe $\tilde{f}$ entwickelt werden. Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten $a_k$, $b_k$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ der zugehörigen Fourierreihe

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \,.$$

Wegen $f(x) = 0$ für $-\pi < x \le 0$ gilt $a_k = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} x \cos kx \, dx$ und $b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} x \sin kx \, dx$.

$a_0 = \dfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \dfrac{1}{\pi} [\frac{x^2}{2}]_0^{\pi} = \dfrac{\pi}{2}$

$a_k = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} x \cos kx \, dx = \dfrac{1}{k\pi} \big[x \sin kx\big]_0^{\pi} - \dfrac{1}{\pi k} \int\limits_0^{\pi} \sin kx \, dx = 0 + \dfrac{1}{\pi k^2} \big[\cos kx \, dx\big]_0^{\pi}$

$= \dfrac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}$

$b_k = \dfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx \, dx = \dfrac{-1}{\pi k} \big[x \cos kx\big]_0^{\pi} + \dfrac{1}{k\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos kx \, dx = \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} + \dfrac{1}{\pi k^2} \big[\sin kx\big]_0^{\pi}$

$= \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$

Wo gilt $\tilde{f}(x) = f(x)$?

In den Sprungstellen konvergiert die Fourierreihe gegen den Mittelwert der Grenzwerte. $f$ ist schon so definiert, dass $f(x) = \tilde{f}(x) \;\forall x \in \mathbb{R}$ gilt.

**c)** Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourierreihe an der Stelle $x = 0$ den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

$$\tilde{f}(0) = 0 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{-2}{1} + \frac{0}{2^2} + \frac{-2}{3^2} + \frac{0}{2^2} + \frac{-2}{5^2} + \ldots$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

**d)** $g(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx$

Wegen $\cos(-kx) = \cos(kx)$ und $\sin(-kx) = -\sin(kx)$ gilt

$\frac{1}{2}(g(x) + g(-x)) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx$ und $\frac{1}{2}(g(x) - g(-x)) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin kx$.

**e)** Welche Funktion wird durch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$ dargestellt?

Es gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.

$$\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = -\pi \\ \frac{x}{2} & \text{für } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{für } x = \pi \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{Gesamt: 12 P}}$

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$(3x-2t)y_x + (2x-3t)y_t + 2(t^2-x^2)y = 0.$$

**a)** Bestimmen Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem:

$$\dot{x} = \boxed{3x-2t}$$

$$\dot{t} = \boxed{2x-3t}$$

**b)** Bestimmen Sie daraus die Phasen-DGL: $\dfrac{dx}{dt} = \boxed{\dfrac{3x-2t}{2x-3t}}$

**c)** Bringen Sie diese DGL in die Form $p(x,t)dx + q(x,t)dt = 0$ mit Funktionen

$$p(x,t) = 2x-3t \quad \text{und} \quad q(x,t) = \boxed{2t-3x}.$$

**d)** Bestimmen Sie die für die exakte DGL in (c) eine Potentialfunktion $u$ (also mit $u_x = p$ und $u_t = q$):

$$u(x,t) = \boxed{x^2-3xt+t^2}$$

**e)** Ergänzen Sie $u(x,t)$ durch $v(x,t) = xt$ zu einer außerhalb der Winkelhalbierenden umkehrbaren Substitution, und berechnen Sie mittels der Kettenregel:

$$y_x = y_u \cdot \boxed{(2x-3t)} + y_v \cdot \boxed{t}$$
$$y_t = y_u \cdot \boxed{(2t-3x)} + y_v \cdot \boxed{x}$$

**f)** Reduzieren Sie damit die gegebene PDG auf eine gewöhnliche DGL (bei festgehaltener Variable $u$):

$$y_v = \boxed{y}$$

**g)** Bestimmen Sie aus der allgemeinen Lösung der DGL in (g) die allgemeine Lösung der gegebenen PDG:

$$y(x,t) = \boxed{A(x^2-3xt+t^2)e^{xt}}$$

**Gesamt: 12 P**

Gegeben sei die Matrix $A$ und der Vektor $\vec{b}$ mit mit

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

**a)** (i) Die Eigenwerte von $A$ sind: $\lambda_1 = \boxed{0}$, $\lambda_2 = \boxed{2}$, $\lambda_3 = \boxed{-2}$.

(ii) $A$ besitzt die Eigenvektoren: $\vec{v}_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}$, $\vec{v}_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$, $\vec{v}_3 = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

(iii) Die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems $\vec{y}\,'(x) = A \cdot \vec{y}(x)$ lautet

$$\vec{y}_{hom}(x) = \boxed{c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}}$$

**b)** Bestimmen Sie für das inhomogene System

$$\vec{y}\,'(x) = A \cdot \vec{y}(x) + \vec{b} \cdot e^{-x} \quad (1)$$

eine partikuläre Lösung mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes.

Ansatz: $\vec{y}_p(x) = \boxed{\vec{c} \cdot e^{-x}}$

Damit ergibt sich eine partikuläre Lösung zu:

$$\vec{y}_p(x) = \boxed{-\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-x}}$$

**c)** Geben Sie alle Lösungen des inhomogenen Systems (1) an.

$$\vec{y}(x) = \boxed{\vec{y}_{hom}(x) + \vec{y}_p(x)}$$

**d)** Für welchen Parameter $d \in \mathbb{R}$ und welche der Lösungen aus a) gilt $\lim\limits_{x \to \infty} e^{d\,x} \vec{y}(x) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$?

$$d = \boxed{2}, \quad \vec{y}(x) = \boxed{-2\, e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

**Gesamt: 12 P**