Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. W. Rump

Höhere Mathematik III **Diplomvorprüfung** **04.03.08**

2. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
aer, autip, verf, wewi

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- Es gibt insgesamt **6 Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 handbeschriebene DIN A4 Blätter, Tabelle für die Laplace–Transformation.
- Bei den **Aufgaben 1–4** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht!
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die folgenden Angaben könnten hilfreich sein:

Laplacetransformierte ($n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$):

f	f'	f''	t^n	e^{at}	$t^n \cdot e^{at}$
$L(f)(s)$	$sL(f)(s) - f(0)$	$s^2L(f)(s) - sf(0) - f'(0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

f	$\sin(at)$	$\cos(at)$	$\sinh(at)$	$\cosh(at)$	$t \cdot \sin t$	$t \cdot \cos t$
$L(f)(s)$	$\frac{s}{a^2+s^2}$	$\frac{a}{a^2+s^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{2s}{(s^2+1)^2}$	$\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$

- In dieser Klausur können bis zu **56 Punkte** erreicht werden.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab Mitte April im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 7. Stock (bei dem Seminarraum 7.527) durch Aushang bekannt gegeben (Ankündigung auf der Homepage zu HM III).

  Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Soweit mündliche Nachprüfungen erforderlich sein sollten, werden die nötigen Informationen zusammen mit den Prüfungsergebnissen bekannt gegeben. Eine individuelle Benachrichtigung der betreffenden Kandidatinnen und Kandidaten erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an der Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (13 Punkte):
Gegeben seien der Körper K durch

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1\,,\ 0 \le z \le 1 - y\}$$

und das Vektorfeld $\vec{v}$ mit

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Skizzieren Sie K und geben Sie eine Parametrisierung der drei Randflächen

i) $S_1 = K \cap \{z = 0\}$

ii) $S_2 = K \cap \{x^2 + y^2 = 1\}$

iii) $S_3 = K \cap \{z + y = 1\}$

von K an.

b) Berechnen Sie $\iint_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{o}$ und $\iint_{S_3} \vec{v} \cdot d\vec{o}$, wobei der Normalenvektor in das Äußere von K weist.

c) Berechnen Sie $\operatorname{div} \vec{v}$ und das Volumen von K.

Bestimmen Sie mit Hilfe des Integralsatzes von Gauss $\iint_{S_2} \vec{v} \cdot d\vec{o}$.

Aufgabe 2 (12 Punkte):
Eine Transformation ψ des ersten Quadranten auf die Halbebene $x \ge 0$ sei durch

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{u+v}\,, \qquad y = \frac{v-u}{2}\,, \qquad u, v \ge 0$$

gegeben.

a) Bestimmen und skizzieren Sie mit Hilfe der Terme $y - x^2$ und $y + x^2$ die Bilder der Halbgeraden $u = 0$ und $u = 4\,(v \ge 0)$ beziehungsweise $v = 0$ und $v = 4\,(u \ge 0)$.

Das Rechteck

$$\widehat{G} := \left\{\, (u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le 4,\ 0 \le v \le 4 \,\right\}$$

wird unter der Transformation ψ auf ein Gebiet G abgebildet. Zeichnen Sie nun das Gebiet G in die Skizze ein.

b) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante der Transformation ψ und mit Hilfe des Transformationssatzes für Gebietsintegrale den Flächeninhalt von G.

c) Berechnen Sie für das Strömungsfeld

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 \\ -2xy^3 + 3xy \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

die Divergenz sowie mit Hilfe des Divergenzsatzes den Fluss von $\vec{F}$ durch ∂G (Randkurve von G) von innen nach außen.

Name: **Matrikel–Nr.:**

Hinweise:

- Tragen Sie Name und Matrikelnummer in die oben vorgesehenen Kästchen ein und geben Sie dieses Blatt zusammen mit Ihren anderen Ausarbeitungen ab.
- Bei **Aufgabe 5 und 6** genügt es, die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen einzutragen. Der Lösungsweg wird nicht verlangt und nicht gewertet.

Aufgabe 3 (6 Punkte): Gegeben sei der Körper K durch

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, 3y^2 \leq z \leq 4 - 4x^2 - y^2\}.$$

a) Berechnen Sie die Projektion $\mathcal{P}$ von K auf die $xy-$Ebene.
Wie lässt sich $\mathcal{P}$ durch Polarkoordinaten parametrisieren?

b) Berechnen Sie das Volumen von K.

Aufgabe 4 (6 Punkte): Gegeben sei das Gebietsintegral

$$I := \int_{y=0}^{2} \int_{x=2-y}^{\sqrt{4-y}} \frac{1}{2-x} \, e^{\frac{y}{2-x}} \, dx \, dy$$

a) Skizzieren Sie das Integrationsgebiet.

b) Berechnen Sie I durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge und Veränderung der Grenzen.

Aufgabe 5 (7 Punkte): Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y''(x) - y(x) = e^x, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 1 \quad (*)$$

a) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte der Lösung $y(x)$ von $(*)$:

$L(y)(s) =$ $\boxed{}$.

b) Die Umkehrtransformation L^{-1} ist linear. Zerlegen Sie $L(y)$ mittels Partialbruchzerlegung in Terme, für die Sie die Umkehrtransformation mit Hilfe der Tabelle durchführen können.

$L(y)(s) =$ $\boxed{}$.

c) Geben Sie damit die Lösung von $(*)$ an.

$y(x) =$ $\boxed{}$.

Aufgabe 6 (12 Punkte):

a) Gegeben sei die Differentialgleichung $x \cdot y'(x) + y(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ (1).

(i) Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet: $y_{hom}(x) = \boxed{}$.

(ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (1) : $y(x) = \boxed{}$.

b) Gegeben sei die Differentialgleichung $x^2 \cdot y''(x) - x \cdot y'(x) + y(x) = 0$ (2).

(i) Für $n = \boxed{}$ ist $y(x) = x^n$ eine Lösung von (2).

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $y(x) = c(x) \cdot x^n$ (Reduktion der Ordnung) die allgemeine Lösung von (2):

$c(x) = \boxed{}$, allgemeine Lösung von (2): $y(x) = \boxed{}$.

c) Gegeben sei die Differentialgleichung $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = e^{-2x}$ (3).

(i) Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet:

$$y_{hom}(x) = \boxed{} .$$

(ii) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung y_p von (3) mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes.

Ansatz: $y_p(x) = \boxed{}$.

Eine patrikuläre Lösung von (3) lautet: $y_p(x) = \boxed{}$.