Gegeben seien der Körper K durch

$$K = \{(x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\,,\, 0 \leq z \leq 1 - y\}\,.$$

und das Vektorfeld $\vec{v}$ mit $\vec{v} = (x + y, y + z, x + z)^T$.

a) Skizzieren Sie K : Durch die Ebene $z = 1 - y$ abgeschnittener Zylinder

Geben Sie eine Parametrisierung der drei Randflächen S_1, S_2, S_3 von K an:

i) $S_1 = K \cap \{z = 0\} : \vec{x} = (x, y, 0),\ (x^2 + y^2) \leq 1$
oder $\vec{x} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0),\ 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

ii) $S_2 = K \cap \{x^2 + y^2 = 1\}$: $\vec{x} = (\cos\varphi, \sin\varphi, z)^T,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 1 - \sin\varphi$

iii) $S_3 = K \cap \{z + y = 1\}$: $(r\cos\varphi, r\sin\varphi, 1 - r\sin\varphi)^T,\ 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

b) Berechnen Sie $\iint_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{o}$:
$d\vec{o} = (0, 0, -1)^T dxdy$, $\vec{v}(\vec{x})d\vec{o} = (*, *, x + 0) \cdot (0, 0, -1)^T\, dxdy = -x\, dxdy$ und damit $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} -x dxdy = 0$.

Berechnen Sie: $\iint_{S_3} \vec{v} \cdot d\vec{o}$:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi + r\sin\varphi \\ r\sin\varphi + 1 - r\sin\varphi \\ r\cos\varphi + 1 - r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi + r\sin\varphi \\ 1 \\ r\cos\varphi + 1 - r\sin\varphi \end{pmatrix},$$

$$d\vec{o} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ r \end{pmatrix} drd\varphi,$$

$$\iint_{S_3} \vec{v} \cdot d\vec{o} = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} (r + r^2 \underbrace{\cos\varphi}_{\rightsquigarrow 0} + r - r^2 \underbrace{\sin\varphi}_{\rightsquigarrow 0})\, drd\varphi = 2\pi \int\limits_{r=0}^{1} 2r\, dr = 2\pi$$

c) Berechnen Sie: $\operatorname{div}\vec{v} = 3$

(Volumen mit Polarkoordinaten!) $V = \iiint\limits_K 1\, dV = \iiint\limits_K dx\, dy\, dz = \int\limits_\varphi \int\limits_r \int\limits_{z=0}^{1-r\sin\varphi} r\, dz\, dr\, d\varphi$
$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} (1 - r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi = 2\pi \cdot \dfrac{1}{2} = \pi.$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Integralsatzes von Gauss $\iint_{S_2} \vec{v} \cdot d\vec{o}$.

$\iiint\limits_K \operatorname{div}\, \vec{v}\, dxdydz = 3V = 3\pi$

$\Rightarrow 3\pi = \iint\limits_{S_1+S_2+S_3} \vec{v} d\vec{o} = 2\pi + \iint\limits_{S_2} \vec{v}\, d\vec{o} \Rightarrow \iint\limits_{S_2} \vec{v}\, d\vec{o} = \pi$

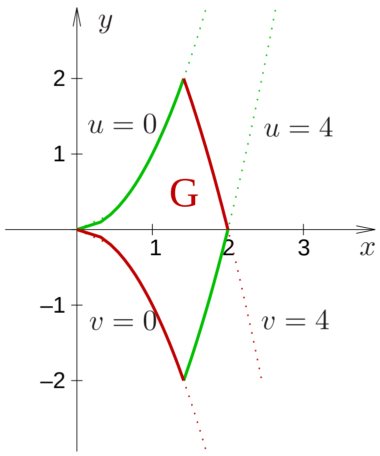
Gesamt: 13 P

Eine Transformation ψ des ersten Quadranten auf die Halbebene $x \geq 0$ sei durch

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{u+v}\,, \qquad y = \frac{v-u}{2}\,, \qquad u, v \geq 0$$

gegeben.

a) Bestimmen und skizzieren Sie mit Hilfe der Terme $y - x^2$ und $y + x^2$ die Bilder der Halbgeraden $u = 0$ und $u = 4$, $(v \geq 0)$ beziehungsweise $v = 0$ und $v = 4$ $(u \geq 0)$.
$y - x^2 = -u,\ y + x^2 = v$:
Nach oben (unten) geöffnete Parabeln mit Scheiteln in $(0, -u)$ bzw. $(0, v)$ und Nullstellen bei $(0, \sqrt{u}$ bzw $(0, \sqrt{v})$. Das Rechteck
$\widehat{G} := \{\, (u, v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq u \leq 4,\ 0 \leq v \leq 4 \,\}$
wird unter der Transformation ψ auf ein Gebiet G abgebildet. Skizzieren Sie das Gebiet G.



b) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante der Transformation ψ und mit Hilfe des Transformationssatzes für Gebietsintegrale den Flächeninhalt von G.

$$|\psi| = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u+v}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u+v}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{u+v}}$$

$$|G| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int\limits_{v=0}^{4} \int\limits_{u=0}^{4} \frac{dudv}{\sqrt{u+v}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{v=0}^{4} (\sqrt{4+v} - \sqrt{v})dv = \frac{\sqrt{2}}{3}(\sqrt{8}^3 - \sqrt{4}^3 - \sqrt{4}^3 + \sqrt{0}^3)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{3}(\sqrt{8}^{\,3} - 2\sqrt{4}^{\,3}) = \frac{16\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2} - 1)$$

c) Berechnen Sie für das Strömungsfeld

$$\vec{F}(x, y) = (3x^2y^2,\ -2xy^3 + 3xy)^T$$

die Divergenz sowie mit Hilfe des Divergenzsatzes den Fluss von $\vec{F}$ durch ∂G (Randkurve von G) von innen nach außen.

$\mathrm{div}\vec{F} = 6xy^2 - 6xy^2 + 3x = 3x$

$$\int\limits_{\partial G} \vec{F} d\vec{x} = \iint\limits_{G} \mathrm{div}\vec{F} dxdy = 3 \iint\limits_{G} xdxdy = \frac{3}{2\sqrt{2}} \int\limits_{v=0}^{4} \int\limits_{u=0}^{4} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{u+v}}{\sqrt{u+v}} dudv$$
$$= \frac{3}{4} \int\limits_{v=0}^{4} \int\limits_{u=0}^{4} 1\, dudv = \frac{3}{4} \cdot 4 \cdot 4 = 12$$

Gesamt: 12 P

Gegeben sei der Körper K durch $3y^2 \le z \le 4 - 4x^2 - y^2$.

a) Bestimmen Sie die Projektion $\mathcal{P}$ von K auf die $xy-$Ebene. Wie lässt sich $\mathcal{P}$ durch Polarkoordinaten parametrisieren?

$z = 3y^2$ ist ein parabolischer Zylinder, $z = 4 - 4x^2 - y^2$ ist ein Paraboloid.

$3y^2 = 4 - 4x^2 - y^2 \rightarrow 4 \ge 4x^2 + 4y^2$ (Einheitskreis), $\mathcal{P}: \; x^2 + y^2 \le 1$.

$x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi, \quad 0 \le r \le 1, \; 0 \le \varphi \le 2\pi.$

b) Berechnen Sie das Volumen von K.

$$V = \iiint\limits_K 1 \, dzdydx = \iint\limits_{\mathcal{P}} \int\limits_{z=3y^2}^{4-4x^2-y^2} dz = \iint\limits_{\mathcal{P}} (4 - 4x^2 - y^2 - 3y^2)\, dxdy =$$

$$4 \iint\limits_{\mathcal{P}} (1 - x^2 - y^2)\, dxdy = 4 \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} (1 - r^2)\, r \, dr d\varphi = 8\pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2\pi$$

$\boxed{\textbf{Gesamt: 6 P}}$

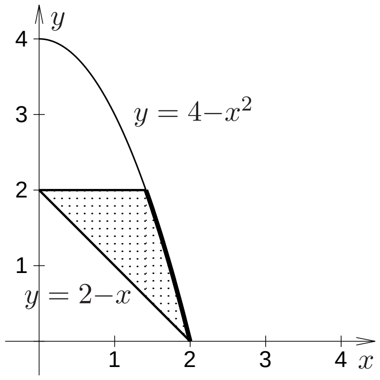
Gegeben sei das Gebietsintegral

$$I := \int_{y=0}^{2} \int_{x=2-y}^{\sqrt{4-y}} \frac{1}{2-x}\, e^{\frac{y}{2-x}}\, dx\, dy$$

a) Skizzieren Sie das Integrationsgebiet.

Randkurven des Integrationsgebiets:

- $x = 2 - y \Longrightarrow y = 2 - x$
- $x = \sqrt{4-y} \Longrightarrow y = 4 - x^2$
- $y = 2$



b) Berechnen Sie I durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge und Veränderung der Grenzen.

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{\sqrt{2}} \int_{y=2-x}^{2} \frac{1}{2-x}\, e^{\frac{y}{2-x}}\, dy\, dx + \int_{x=\sqrt{2}}^{2} \int_{y=2-x}^{4-x^2} \frac{1}{2-x}\, e^{\frac{y}{2-x}}\, dy\, dx \\ &= \int_{x=0}^{\sqrt{2}} e^{\frac{y}{2-x}} \Big|_{y=2-x}^{2} dx + \int_{x=\sqrt{2}}^{2} e^{\frac{y}{2-x}} \Big|_{y=2-x}^{4-x^2} dx \\ &= \int_{x=0}^{\sqrt{2}} (e^{\frac{2}{2-x}} - e)\, dx + \int_{x=\sqrt{2}}^{2} (e^{2+x} - e)\, dx \end{aligned}$$

Dieser Term lässt sich noch vereinfachen:

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{\sqrt{2}} (e^{\frac{2}{2-x}} - e)\, dx + e^{2+x} - e\cdot x\Big|_{\sqrt{2}}^{2} = \int_{x=0}^{\sqrt{2}} (e^{\frac{2}{2-x}} - e)\, dx + e^4 - 2e - e^{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2}e. \\ &= \int_{x=0}^{\sqrt{2}} e^{\frac{2}{2-x}}\, dx + e^4 - 2e - e^{2+\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Alternativ:

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{2} \int_{y=2-x}^{4-x^2} \frac{1}{2-x}\, e^{\frac{y}{2-x}}\, dy\, dx - \int_{x=0}^{\sqrt{2}} \int_{y=2}^{4-x^2} \frac{1}{2-x}\, e^{\frac{y}{2-x}}\, dy\, dx \\ &= \int_{x=0}^{2} e^{\frac{y}{2-x}} \Big|_{y=2-x}^{4-x^2} dx - \int_{x=0}^{\sqrt{2}} e^{\frac{y}{2-x}} \Big|_{y=2}^{4-x^2} dx \\ &= \int_{x=0}^{2} (e^{2+x} - e)\, dx - \int_{x=0}^{\sqrt{2}} (e^{2+x} - e^{\frac{2}{2-x}})\, dx \\ &= \int_{x=0}^{\sqrt{2}} e^{\frac{2}{2-x}}\, dx + e^4 - 2e - e^{2+\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Gesamt: 6 P}}$

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y''(x) - y(x) = e^x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \quad (*)$$

a) Bestimmen Sie Laplace-Transformierte der Lösung $y(x)$ von $(*)$:

$$L(y)(s) = \boxed{\frac{1}{(s^2-1)(s-1)} + \frac{1}{s^2-1}}\ .$$

b) Die Umkehrtransformation L^{-1} ist linear. Zerlegen Sie $L(y)$ mittels Partialbruchzerlegung in Terme, für die Sie die Umkehrtransformation mit Hilfe der Tabelle durchführen können.

$$L(y)(s) = \boxed{-\frac{1}{4}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{s^2-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2}}\ .$$

c) Geben Sie damit die Lösung von $(*)$ an.

$$y(x) = \boxed{-\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}te^x + \sinh x = \frac{1}{2}\sinh x + \frac{1}{2}xe^x}\ .$$

Gesamt: 7 P

a) Gegeben sei die Differentialgleichung $x \cdot y'(x) + y(x) = \frac{\ln x}{x}$ (1).

(i) Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet: $y_{hom}(x) = \boxed{\frac{c}{x},\ c \in \mathbb{R}}$.

(ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (1) : $y(x) = \boxed{\frac{c}{x} + \frac{(\ln x)^2}{2x},\ c \in \mathbb{R}}$.

b) Gegeben sei die Differentialgleichung $x^2 \cdot y''(x) - x \cdot y'(x) + y(x) = 0$ (2).

(i) Für $n = \boxed{1}$ ist $y(x) = x^n$ eine Lösung von (2).

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $y(x) = c(x) \cdot x^n$ (Reduktion der Ordnung) die allgemeine Lösung von (2).

$c(x) = \boxed{\ln|x|}$, allgemeine Lösung von (2): $y(x) = \boxed{c_1 x + c_2 x \ln|x|,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$.

c) Gegeben sei die Differentialgleichung $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = e^{-2x}$ (3).

(i) Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet:

$$y_{hom} = \boxed{c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

(ii) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung y_p von (3) mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes.

Ansatz: $y_p(x) = \boxed{c \cdot x^2 \cdot e^{-2x},\ c \in \mathbb{R}}$.

Die patrikuläre Lösung lautet: $y_p(x) = \boxed{\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot e^{-2x}}$.

Gesamt: 12 P