Gegeben ist die rekursiv definierte Folge (u_n), $n = 0, 1, 2 \ldots$ durch

$$u_0 = 2, \quad u_n = 5 - \frac{4}{u_{n-1}} \quad n = 1, 2, \ldots$$

a) Zeigen Sie: $1 < u_n < 4$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$.

$1 < u_0 < 4$, Induktionsannahme: $1 < u_n < 4$.

$5 - \frac{4}{1} = 1 < u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n} < 5 - \frac{4}{4} = 4$

b) Zeigen Sie: die Folge (u_n) ist streng monoton wachsend.

$u_1 = 5 - \frac{4}{2} = 3 \Rightarrow u_1 - u_0 > 0$,

Wir verwenden vollständige Induktion: $u_1 > u_0$.

Induktionsannahme: $u_n > u_{n-1}$.

$u_{n+1} - u_n = \frac{4}{u_{n-1}} - \frac{4}{u_n} = 4\frac{u_n - u_{n-1}}{u_{n-1}u_n} > 0$

Alternativ: $u_0 = 2 > 1$. $u_{n+1} - u_n = 5 - \frac{4}{u_n} - u_n = \frac{5u_n - 4 - u_n^2}{u_n}$.

Der Zähler ist positiv für $1 < u_n < 4$. Dies folgt aus a).

c) Begründen Sie, dass die Folge konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

Die Folge ist monoton und beschränkt, also konvergent.

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = u$ gilt $u^2 - 5u + 4 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = 1, 4$.

Mit $u_0 = 2$ und der Monotonie muss der Grenzwert $u = 4$ sein.

Gesamt: 8 P

Bestimmen Sie

a) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ mit Hilfe der Substitution $u = \sqrt{x}$,

$x = u^2,\ dx = 2u\,du \Rightarrow \int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int\limits_0^\infty \frac{2u\,du}{u(1+u^2)} = 2\int\limits_0^\infty \frac{du}{1+u^2} = 2\arctan u\Big|_0^\infty = \pi$

b) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x)}$.

Partialbruchzerlegung: $\frac{1}{x^2(1+x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{1+x}$

Grenzwertmethode: $b = \frac{1}{1+x}\Big|_{x=0} = 1,\ c = \frac{1}{x^2}\Big|_{x=-1} = 1$

a bestimmt man schnell durch Einstzen eines Wertes, z. B. $x = 1$: $\frac{1}{2} = a + 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow a = -1$

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x)} = \int\limits_1^\infty \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x}\right) dx = \lim_{A\to\infty} \left(-\ln x + \ln(1+x) - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^A$$
$$= \lim_{A\to\infty} \left(\ln\frac{1+x}{x} - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^A = 0 - \ln 2 + 1 = 1 - \ln 2$$

$\boxed{\textbf{Gesamt: 8 P}}$

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3+\alpha & 1-\alpha & 0 \\ 1-\alpha & 3+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

a) Bestimmen Sie zum Eigenwert $\lambda = 4$ zwei Eigenvektoren $\vec{f_1}$ und $\vec{f_2}$ der Matrix A mit $\vec{f_1} \perp \vec{f_2}$.

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -1+\alpha & 1-\alpha & 0 \\ 1-\alpha & -1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{f} = \vec{0} \Rightarrow \vec{f_1} = (1,1,0)^T,\ \vec{f_2} = (0,0,1)^T$$

b) Geben Sie einen von $\vec{f_1}$ und $\vec{f_2}$ linear unabhängigen Eigenvektor $\vec{f_3}$ von A und den zugehörigen Eigenwert an.

$\vec{f_3} = \vec{f_1} \times \vec{f_2} = (1,-1,0)^T,\ A\vec{f_3} = (2+2\alpha)\vec{f_3} \Rightarrow \lambda_3 = 2+2\alpha$

c) Geben Sie eine Orthogonalmatrix S und eine Diagonalmatrix D an, so dass $S^T AS = D$ gilt.

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2+2\alpha \end{pmatrix}$$

d) Gegeben sei eine Schar von Quadriken durch

$$Q_\alpha : \quad (3+\alpha)x_1^2 + (3+\alpha)x_2^2 + (2-2\alpha)x_1x_2 + 4x_3^2 = 1\,.$$

i) Bestimmen Sie die Normalform dieser Quadriken bezüglich der Koordinaten $\vec{x} = S\vec{y}$.
Mit $\vec{x}^T A\vec{x} = 1$ und $\vec{x} = S\vec{y}$ ergibt sich
$4y_1^2 + 4y_2^2 + (2+2\alpha)y_3^2 = 1.$

ii) Für welches α ist Q_α eine Kugel? $\alpha = 1$

iii) Geben Sie den Typ von Q_{-1} an: $4y_1^2 + 4y_2^2 = 1 \rightarrow$ Kreiszylinder

e) Wie lautet die Gleichung der Ebene $x_1 = 1$ im $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$−System?

$$(1,0,0)\cdot(x_1,x_2,x_3)^T = 1 \overset{\vec{x}=S\vec{y}}{\Longrightarrow} (1,0,0)S\cdot\vec{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\cdot\vec{y} = 1 \Rightarrow y_1 + y_3 = \sqrt{2}$$

Gesamt: 11 P

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = (1 - x^2)e^{-x^2}$.

a) **Symmetrie:** Es gilt $f(-x) = f(x)$, also Achsensymmetie zur y-Achse.

Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0$, die Nullstellen sind also ± 1.

Extremstellen:

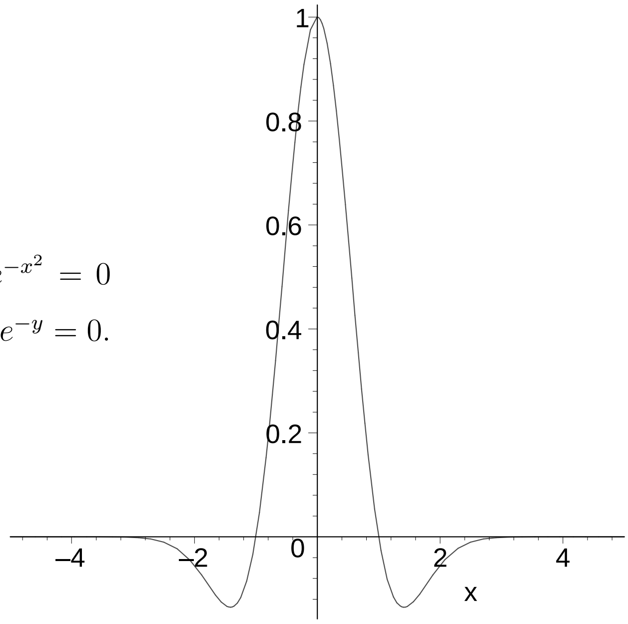
Es gilt $f'(x) = ((1 - x^2) \cdot (-2x) - 2x)e^{-x^2} = (-4x + 2x^3)e^{-x^2} = 2x(x^2 - 2)e^{-x^2}$.

Als Extremstellen kommen somit 0 und $\pm\sqrt{2}$ in Frage.

Nun kann man mit Vorzeichenwechsel argumentieren oder mit der zweiten Ableitung $f''(x) = (-4x^4 + 14x^2 - 4)e^{-x^2}$, $f''(0) = -4 < 0$, $f''(\pm\sqrt{2}) = (-16 + 28 - 4)e^{-2} > 0$. Die Funktion f besitzt somit an der Stelle 0 ein lokales Maximum und an den Stellen $\pm\sqrt{2}$ lokale Minima.

b)

Es gilt $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, da $\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = 0$ und $\lim_{x\to\pm\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$ wegen $\lim_{y\to\infty} ye^{-y} = 0$.



c) Entwickeln Sie die Funktion f in eine Potenzreihe um $x_0 = 0$.

$$f(x) = (1 - x^2)e^{-x^2} = (1 - x^2)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n-1)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}\right) x^{2n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n}{n!} x^{2n}$$

$\boxed{\textbf{Gesamt: 10 P}}$

Bestimmen Sie das Minimum der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto 4\,x^2 + z$$

auf der Schnittkurve des parabolischen Zylinders $\mathcal{Z} : x + y^2 = 0$ und der Ebene $\mathcal{E} : 2y - z = 1$.

Lagrangefunktion: $L(x, y, z, \lambda, \mu) = 4x^2 + z + \lambda\,(x + y^2) + \mu\,(2y - z - 1)$

Notwendige Bedingung für Extrema: $L_x = L_y = L_z = 0$ und $L_\lambda = L_\mu = 0$ (Nebenbedingungen).

$$\begin{aligned} L_z = 1 - \mu = 0,\ L_y = 2\lambda y + 2\mu = 0,\ L_x = 8x + \lambda = 0 \\ \implies \mu = 1,\ \lambda y = -1\,(\rightsquigarrow y \neq 0!),\ 8x = -\lambda \\ \implies \lambda = -\frac{1}{y},\ x = \frac{1}{8y}. \end{aligned}$$

Zusammen mit den Nebenbedingungen folgt daraus

$$x = \frac{1}{8y} \quad \text{und} \quad x + y^2 = 0 \implies y^2 = -\frac{1}{8y} \implies y = -\frac{1}{2} \implies x = -\frac{1}{4}.$$

$$y = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad 2y - z = 1 \implies z = -2$$

Als Kandidaten für das Extrema haben wir also den Punkt $P(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -2)$. f nimmt in P den Wert $4\,\frac{1}{4^2} - 2 = -\frac{7}{4}$ an (Nachweis, dass ein Minimum vorliegt, wird nicht verlangt).

$\boxed{\textbf{Gesamt: 8 P}}$

Gegeben sei das von den reellen Parameter t und c abhängige lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & 3\,t\,x_2 & & & = & c \\ & & 2\,x_2 & + & (2-t)\,x_3 & = & 2 \\ -x_1 & + & (2-t)\,x_2 & - & t\,x_3 & = & 1 \end{array}\right\} (\star)$$

a) Geben Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A von $(\star)$ in Abhängigkeit von t an.

$$\det(A) = \boxed{4t^2 - 8t + 4}$$

b) $(\star)$ besitzt für $t \neq \boxed{1}$ genau eine Lösung.

c) $(\star)$ besitzt für $t = \boxed{1}$ und $c = \boxed{3}$ unendlich viele Lösungen.

Diese sind gegeben durch:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R})}\,.$$

Gesamt: 9 P