Gegeben sei die Geradenschar

$$g_a:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} a+1 \\ a \\ -2+5a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 3+2a \end{pmatrix}\ (\lambda \in \mathbb{R}) \text{ sowie die Gerade } h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ (\mu \in \mathbb{R}).$$

mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass die Geraden g_0 und g_1 in einer Ebene E liegen und geben Sie die Gleichung von E in Koordinatendarstellung an.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 0, \mu = -1$$

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},\ E:\ (\vec{x} - \vec{p})\vec{n}_E = 0 \Rightarrow -2x_1 - 3x_2 + x_3 = -4$$

Weisen Sie nach, dass alle Geraden g_a für $a \in \mathbb{R}$ in der Ebene E liegen.

$-2a - 2 - 3a - 2 + 5a + \lambda(-2a - 3 + 3 + 2a) = -4$

b) Zeigen Sie, dass h parallel zu E ist und berechnen Sie den Abstand von h zu E.

$$\vec{n}_E \cdot (-1,1,1)^T = 0,\ (2,1,-4) \notin E.\ d(h,E) = \left| \frac{-2\cdot 2 - 3\cdot 1 + 1\cdot(-4) + 4}{\sqrt{14}} \right| = \frac{7}{\sqrt{14}}$$

c) Untersuchen Sie in Abhängigkeit von a, ob die Geraden h und g_a parallel oder windschief sind.

$(-1,1,1)^T\ ||\ (a,1,3+2a)^T$? Nur für $a = -1$ ist $g_a\,||\,h$.

d) Berechnen Sie in Abhängigkeit von a den Abstand von h zu g_a.

Für $a \neq -1$ ist $d(h, g_a) = d(h, E) = \dfrac{7}{\sqrt{14}}$, da die beiden (windschiefen) Geraden immer ein gemeinsames Lot $||\, n_E$ besitzen.

Für $a = -1$ muss der Abstand der beiden parallelen Geraden h und g_{-1} berechnet werden. Dazu benötigen wir ein gemeinsames Lot: Mit dem Aufpunkt von g_{-1} : $(0,-1,-7)$ ergibt sich

$$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 3 + 3\mu = 0 \Rightarrow \vec{v}_{\text{Lot}} = (3,1,2)^T$ und $d(h, g_{-1}) = \sqrt{14}$

$\boxed{\textbf{Gesamt: 11 P}}$

Für fest gewählten Parameter $a > 0$ sei die Funktion f_a definiert durch

$$f_a(t) := \sqrt{\frac{1}{a^2} - t} \quad \left(t \leq \frac{1}{a^2}\right).$$

a) Berechnen Sie für f_a das eindimensionale Taylorpolynom der Ordnung 2 um den Punkt $t = 0$ in Abhängigkeit des Parameters a.

Die ersten zwei Ableitungen von f_a sind

$$f_a'(t) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} - t\right)^{-1/2} \quad \text{und} \quad f_a''(t) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2} - t\right)^{-3/2}.$$

Damit folgt für das gesuchte Taylorpolynom der Ordnung 2

$$T_2(t) = f_a(0) + f_a'(0) \cdot t + \frac{1}{2} f_a''(0) \cdot t^2 = \frac{1}{a} - \frac{1}{2}\, a\, t - \frac{1}{8}\, a^3\, t^2.$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) für die Funktion

$$g(x, y) = f_2(y) \cdot \frac{1 + f_1(x)}{x} \quad \left(x \leq 1, y \leq \frac{1}{4}\right)$$

das zweidimensionale Taylorpolynom der Ordnung 1 an der Stelle $(x, y) = (0, 0)$.

Mit a) folgt für die ersten Glieder der eindimensionalen Taylorpolynome von f_1 und f_2 um $x = 0$ bzw. $y = 0$

$$T^{f_1}(x) = 1 - \frac{1}{2}\, x - \frac{1}{8}\, x^2 \quad \text{und} \quad T^{f_2}(y) = \frac{1}{2} - y \quad \left(\text{bzw. } \frac{1}{2} - y - y^2\right).$$

Damit ergibt sich für die ersten Glieder des Taylorpolynoms von g um $(0, 0)$

$$\begin{aligned} T^g(x, y) &= T^{f_2}(y) \cdot \frac{1 + T^{f_1}(x)}{x} = \left(\frac{1}{2} - y\right) \cdot \frac{1 - (1 - \frac{1}{2}\, x - \frac{1}{8}\, x^2)}{x} \\ &= \left(\frac{1}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} x\right) \end{aligned}$$

Das gesuchte zweidimensionale Taylorpolynom der Ordnung 1 ist also

$$T_1(x, y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\, x - \frac{1}{2}\, y.$$

$\boxed{\textbf{Gesamt: 8 P}}$

a) B ist obere Dreiecksmatrix $\Longrightarrow$ Eigenwerte sind die Diagonaleinträge 1, 1, -1, 0.

b)
- Eigenvektor zum Eigenwert 0 :

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

- Eigenvektor zum Eigenwert -1 :

$$B + E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Eigenvektoren zum Eigenwert 1 :

$$B - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass zum doppelten Eigenwert 1 nur einen Eigenvektor, nämlich

$$v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

existiert. Es ist also noch ein Hauptvektor zu berechnen.

- Hauptvektor v_4 zum Eigenwert 1 und Eigenvektor v_3 :

$$(B - E)\, v_4 = v_3 \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right),$$

d.h. zum Beispiel

$$v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(v_4 nur eindeutig bis auf die homogene Lösung, also Vielfache von v_3).

c) Aus a) und b) folgt: Die Jordan-Normalform von B ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{Gesamt: 9 P}}$

a) Da $1+i$ Nullstelle des reellen Polynoms p ist, ist auch $1-i$ Nullstelle. Somit kann man p durch $(z-1-i)(z-1+i) = z^2-2z+2$ teilen.

Polynomdivision ergibt $p(z) = (z^2-2z+2)(z^2-5z+6)$.

Mit Hilfe der Mitternachtsformel berechnet man als Nullstellen von z^2-5z+6 die Werte 2 und 3 und erhält

i) die reelle irreduzible Zerlegung

$$p(z) = (z^2-2z+2)(z-2)(z-3),$$

ii) die komplexe irreduzible Zerlegung

$$p(z) = (z-1-i)(z-1+i)(z-2)(z-3).$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{2+i}{1-2i} &= \frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2+i+4i-2}{1+4} = i \\ z &= i^3 \cdot (1+i) = -i(1+i) = -i+1 \end{aligned}$$

i) $z = 1-i$.

ii) $z = \sqrt{2}e^{\frac{7}{4}\pi i}$. $(r = |1-i| = \sqrt{2}, \tan\varphi = \frac{y}{x} = -1 \Rightarrow \varphi = \frac{3}{4}\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$

Gesamt: 10 P

Höhere Mathematik I/II — WS 07/08
Lösungshinweis — Aufgabe 5 — Klausur 2

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2\,(n+1) - \sqrt{4\,n^2+n-2}\right) = \boxed{\frac{7}{4}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\dfrac{(3\,n+1)\,(n-1)}{(3\,n-1)\,(n+1)} - 1\right) = \boxed{-\frac{4}{3}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3\,x)^{\frac{2}{x}} = \boxed{e^6}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,\sin(x)}{1-\cos(x)} = \boxed{2}$

Gesamt: 8 P

Höhere Mathematik I/II — WS 07/08
Lösungshinweis — Aufgabe 6 — Klausur 2

a) Welche der folgenden Reihen sind konvergent?
Antworten Sie nur mit 'j' für 'ja' bzw. 'n' für 'nein'. Beachten Sie, dass in dieser Teilaufgabe für falsche Antworten negative Punkte vergeben werden.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$
j	j	n	j

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?
Geben Sie den **maximalen** Konvergenzbereich an.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1+x)^n}{n 2^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(4+\sqrt{n})^n}$
$-3 \le x < 1$	$x \in \mathbb{R}$

Gesamt: 8 P

Höhere Mathematik I/II — WS 07/08
Lösungshinweis — Aufgabe 6 — Klausur 2

a) Welche der folgenden Reihen sind konvergent?
Antworten Sie nur mit 'j' für 'ja' bzw. 'n' für 'nein'. Beachten Sie, dass in dieser Teilaufgabe für falsche Antworten negative Punkte vergeben werden.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$
j	j	n	j

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?
Geben Sie den **maximalen** Konvergenzbereich an.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+x)^n}{n2^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(4+\sqrt{n})^n}$
$-3 \leq x < 1$	$x \in \mathbb{R}$

Gesamt: 8 P