Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler

Klausur für alle gemeldeten Fachrichtungen außer Immobilientechnik und Immobilienwirtschaft

am 21.02.2008, 09.00–11.00.

Bitte unbedingt beachten:

a) Gewertet werden alle acht gestellten Aufgaben.

b) Lösungswege sind anzugeben. Die Angabe des Endergebnisses allein gilt nicht als Lösung. Da *keine* Taschenrechner zugelassen sind, brauchen Zahlenrechnungen, für die man normalerweise einen Taschenrechner benutzen würde, nicht durchgeführt zu werden.
Ausnahme: Zwischenergebnis, für das der Zahlenwert für die weitere Behandlung der Aufgabe unbedingt nötig ist. Dieser Zahlenwert kann aber dann durch Kopfrechnung ermittelt werden.
Ein Endergebnis ist vollständig, wenn zur Ermittlung des Zahlenwertes höchstens die Ausführung der elementaren Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) und die Anwendung elementarer Funktionen ($\exp x (\equiv \mathrm{e}^{\mathrm{x}})$, $\ln x$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, x^y, $\sqrt{x}, \sqrt[y]{x}$) nötig wäre. Z.B. wären $400 \cdot (1.004^{30} - 4)$ oder $\arctan(3.0/\sqrt{13.4})$ gültige Endergebnisse.
Die Bildung von $m!$ und des Binomialkoeffizienten z.B. gehören *nicht* zu den elementaren Rechenoperationen.

c) Zugelassene Hilfsmittel: 15 Seiten DIN A4 mit Sätzen, Definitionen und Formeln (einschließlich begleitender Text dazu), **aber ohne Aufgaben, ohne Lösungsvorschläge von Aufgaben und auch ohne Beispiele,**
Fremdsprachenwörterbücher (ohne zusätzliche Einträge).

Weitere Hinweise:

a) Wer mindestens 30 Punkte erreicht hat, hat bestanden.

b) Weitere Infos finden Sie im Internet in dem File “allginfo.pdf” im Verzeichnis “`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/WiM_Kolbe_WS0708/`”.

Aufgabe 1 **14 Punkte**

a) Prüfen Sie, ob die nachstehenden Folgen konvergent oder bestimmt divergent sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert (als reelle Zahl oder ∞ oder $-\infty$) :

$$a_n := \frac{15n^3 - 10n^2}{7n^2 - 10n + 2}, \quad b_n := \frac{n^4 - 2n^2 + 1}{(n^2+1)^2}, \quad c_n := \sqrt{6n^6 + n^2} - \sqrt{6n^6 + n^3 - n^2}.$$

b) Prüfen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie sie gegebenenfalls (als reelle Zahl oder ∞ oder $-\infty$):

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \quad \lim_{x\to(-7)} f(x), \quad \lim_{x\to 1+} f(x), \quad \lim_{x\to 1-} f(x) \text{ und } \lim_{x\to 1} f(x)$$

$$\text{mit } f(x) := \frac{x^3 + 9x^2 + 15x + 7}{x^2 + 6x - 7}.$$

Aufgabe 2 **8 Punkte**

a) Ein Berufsanfänger verfügt am 01. Januar 2011 über ein Sparguthaben von 2 000 Euro. Zusätzlich schließt er einen Ratensparvertrag ab. Es wird ein nomineller Jahreszinssatz von 3.6% vereinbart. Über welchen Betrag kann er am 31. Dezember 2029 verfügen, wenn er vom 1. Januar 2011 bis zum 1. Dezember 2029 an dem ersten Tag jedes Monats 300 Euro einzahlt und wenn die Zinsen

i) am Ende jedes Monats gutgeschrieben werden?

ii) am Ende jedes Jahres gutgeschrieben werden?

b) Bei welchem Jahreszinssatz wächst ein Kapital von 4 000 Euro (ohne weitere Zahlungsaktivitäten) nach 2 Jahren auf 4 840 Euro an, wenn die Zinsen am Ende jedes Jahres gutgeschrieben werden?

Aufgabe 3 **3 Punkte**

Ein Kredit in Höhe von 40 000 Euro soll mit festen monatlichen Beträgen A zurückgezahlt werden, und zwar jeweils am Ende des Monats. Der nominelle Jahreszinssatz betrage 6%, die Zinsgut- oder lastschrift erfolgt ebenfalls monatlich. Wie groß muss A sein, damit der Kredit nach 10 Jahren vollständig abgezahlt ist?

Aufgabe 4 **4 Punkte**

In eine Anlage, die zwei Jahre lang betrieben wird, werden 40 000 Euro am Anfang des ersten Jahres investiert. Im ersten Betriebsjahr wird ein Einzahlungsüberschuss in Höhe von 42 000 Euro erzielt, im zweiten ein Einzahlungsüberschuss in Höhe von 10 000 Euro, die jeweils am Jahresende dem Betrieb zufließen. Wie hoch ist der interne Zinssatz (d.h. der Zinssatz unter dem ein Kreditszinssatz unbedingt bleiben muss)?
Zur Erleichterung der Zahlenrechnung: $2.1^2 = 4.41$, $4.2^2 = 17.64$, $2.9^2 = 8.41$, $5.8^2 = 33.64$

Aufgabe 5 **16 Punkte**

a) Vorgegeben sei die Funktion
$$f(x) := x^4 - 4x^3 + 10.$$
Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Funktion monoton wachsend ist, und die Intervalle, in denen sie monoton fallend ist. (Dabei soll jedes $x \in \mathbb{R}$ zu mindestens einem der Intervalle gehören.) Prüfen Sie, ob $f(x)$ (relative) Extremwerte besitzt, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Stelle(n), an der (denen) sie angenommen werden.

b) Ein Monopol sieht sich einer Nachfrage $N(p) = 16 \cdot p^{-2}$, $p > 0$, gegenüber, auf die es seine Produktion genau einstellen will, d.h. die produzierte Menge ist $q = N(p)$. Die Kostenfunktion sei
$$K(q) := \begin{cases} 1 + q \text{ für } 0 \leq q \leq 3\,, \\ \\ 13 + \dfrac{2}{3}q \text{ für } 3 < q \leq 16\,. \end{cases}$$
Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $p = N^{-1}(q)$ der Funktion $q = N(p)$, und prüfen Sie, ob es einen Preis p gibt, für den der Gewinn $(p \cdot q - K)$ maximal wird, und bestimmen Sie gegebenenfalls diesen Preis.
Hinweis: Untersuchen Sie zuerst $g(q)$, also den Gewinn als Funktion von q.
Zur Erleichterung der Zahlenrechnung: $4 \cdot \sqrt{3} = 6.93$.

Aufgabe 6 **4 Punkte**

An welcher Stelle besitzt der Graph der Funktion
$$f(x, y) := x^2 + 6xy + y^2 + 5x - y + 10$$
eine waagerechte Tangentialebene?

Aufgabe 7 **6 Punkte**

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$\mathbf{a}_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$, den Flächeninhalt des von $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ aufgespannten Parallelogramms und das Volumen des von den drei Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ aufgespannten Spats.

Aufgabe 8 **11 Punkte**

a) Bestimmen Sie den (endlichen und positiven) Flächeninhalt zwischen den Kurven zu $f(x) := x^3 + x^2 + 20$ und $g(x) := 17x + 5$.

b) Bestimmen Sie folgende Integrale:

$$\int_0^\pi x \cdot \cos x \ \mathrm{d}x\,, \qquad \int_0^2 2x \cdot \cos(x^2) \ \mathrm{d}x\,.$$