

Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Klausur am 01.02.2008, 14.00 – 16.00.

Bitte unbedingt beachten:

- a) Gewertet werden alle acht gestellten Aufgaben.
- b) Lösungswege sind anzugeben. Die Angabe des Endergebnisses allein gilt nicht als Lösung. Da *keine* Taschenrechner zugelassen sind, brauchen Zahlenrechnungen, für die man normalerweise einen Taschenrechner benutzen würde, nicht durchgeführt zu werden. Ausnahme: Zwischenergebnis, für das der Zahlenwert für die weitere Behandlung der Aufgabe unbedingt nötig ist. Dieser Zahlenwert kann aber dann durch Kopfrechnung ermittelt werden. Ein Endergebnis ist vollständig, wenn zur Ermittlung des Zahlenwertes höchstens die Ausführung der elementaren Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) und die Anwendung elementarer Funktionen ($\exp x (\equiv e^x)$, $\ln x$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, x^y , \sqrt{x} , $\sqrt[y]{x}$) nötig wäre. Z.B. wären $400 \cdot (1.004^{30} - 4)$ oder $\arctan(3.0/\sqrt{13.4})$ gültige Endergebnisse. Die Bildung von $m!$, des Binomialkoeffizienten, des Betrages, des Skalarproduktes und des Vektorproduktes z.B. gehören *nicht* zu den elementaren Rechenoperationen.
- c) Zugelassene Hilfsmittel: 10 Seiten DIN A4 mit Sätzen, Definitionen und Formeln (einschließlich begleitender Text dazu), **aber ohne Aufgaben, ohne Lösungsvorschläge von Aufgaben und auch ohne Beispiele**, Fremdsprachenwörterbücher (ohne zusätzliche Einträge).

Weitere Hinweise:

- a) Wer mindestens 30 Punkte erreicht hat, hat bestanden.
- b) Weitere Infos finden Sie im Internet in dem File “allinfo.pdf” im Verzeichnis “http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/WiM_Kolbe_SS07/”.
- c) Einige Werte trigonometrischer Funktionen:
 $\sin(k\pi) = 0$, $\cos(k\pi) = (-1)^k$, $\sin(\pi/2 + k\pi) = (-1)^k$ und $\cos(\pi/2 + k\pi) = 0$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 1

5 Punkte

a) Bestimmen Sie das folgende Integral:

$$\int_1^e 7x^6 \ln x \, dx.$$

b) Prüfen Sie, ob das folgende uneigentliche Integral konvergent ist und bestimmen Sie gegebenenfalls seinen Wert:

$$\int_2^\infty 3x^2 \cdot \exp(-x^3) \, dx, \quad \exp(x) := e^x$$

Aufgabe 2

13 Punkte

Für welche(n) Wert(e) des Parameters p besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -4 \\ x_1 + (7+p)x_2 + (-p-5)x_3 &= -p-5 \\ -x_1 + (6p-16)x_2 - 4x_3 &= -16 \end{aligned}$$

- i) eine (i.a. von p abhängige) eindeutige Lösung,
- ii) mehr als eine Lösung,
- iii) keine Lösung?

Bestimmen Sie im Fall **ii**) die Lösungsmenge (oder die allgemeine Lösung) und für $p = -1$ die Lösung des obigen linearen Gleichungssystems.

Aufgabe 3

10 Punkte

Gegeben seien die Ebene

$$E : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Gerade

$$g : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie ...

- a) ... die Gleichungsdarstellung der Ebene E .
- b) ... den Winkel α zwischen g der Ebenen E und der Geraden g .
- c) ... den gemeinsamen Punkt der Geraden g und der Ebene E .

Aufgabe 4

4 Punkte

Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 3 \\ 2 & -5 & 8 & -2 \\ 2 & -4 & 12 & 6 \\ -2 & 8 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5

6 Punkte

Bestimmen Sie die Koeffizienten des Taylor-Polynoms 3. Ordnung um $x = 0$ für

$$f(x) := e^x \cos(\pi x).$$

Aufgabe 6

9 Punkte

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (wobei auch ∞ als Grenzwert zugelassen ist):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\cos(\pi x/2))^2}{(x-1)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \cdot \ln(x^3), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x)^x.$$

Aufgabe 7

12 Punkte

Bestimmen Sie das absolute Maximum und das absolute Minimum der Funktion

$$f(x, y) := 3x + 9y + 9 \text{ unter der Nebenbedingung } g(x, y) := x^2 + y^2 - 100 \stackrel{!}{=} 0.$$

Aufgabe 8

15 Punkte

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme:

a)

$$y'(x) = 3x^2 (y(x))^3, \quad y(1) = 1.$$

b)

$$y''(x) + 9y(x) = 9x^2 + 9x + 11, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$$