Statistik II für Wirtschaftswissenschaftler

Klausur am 18.01.2008, 14.00–16.00.

Bitte unbedingt beachten:

a) Gewertet werden alle 8 gestellten Aufgaben.

b) Lösungswege sind anzugeben. Die Angabe des Endergebnisses allein gilt nicht als Lösung. Da *keine* Taschenrechner zugelassen sind, brauchen Zahlenrechnungen, für die man normalerweise einen Taschenrechner benutzen würde, nicht durchgeführt zu werden.
Ausnahme: Zwischenergebnis, für das der Zahlenwert für die weitere Behandlung der Aufgabe unbedingt nötig ist. Dieser Zahlenwert kann aber dann durch Kopfrechnung ermittelt werden.
Ein Endergebnis ist vollständig, wenn zur Ermittlung des Zahlenwertes höchstens die Ausführung der elementaren Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) und die Anwendung elementarer Funktionen ($\exp x (\equiv \mathrm{e}^{\mathrm{x}})$, $\ln x$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, a^x, $\sqrt{x}$) nötig wäre. Die Bildung von $m!$ und des Binomialkoeffizienten z.B. gehören *nicht* zu den elementaren Rechenoperationen.

c) Zugelassene Hilfsmittel:
10 Seiten DIN A4 mit Sätzen, Definitionen und Formeln (einschließlich begleitender Text dazu), **aber ohne Aufgaben, ohne Lösungsvorschläge von Aufgaben und auch ohne Beispiele,**
Fremdsprachenwörterbücher (ohne zusätzliche Einträge),
Tabelle der Standardnormalverteilung ohne zusätzliche Einträge ,
Tabelle der Quantile der χ^2–Verteilung ohne zusätzliche Einträge ,
Tabelle der Quantile der t–Verteilung ohne zusätzliche Einträge.

Weitere Hinweise:

a) Wer mindestens 30 Punkte erreicht hat, hat bestanden.

b) Weitere Infos finden Sie im Internet in dem file “allginfo.pdf” im Verzeichnis “`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/WiS_Kolbe_SS07/`”.

Aufgabe 1 **10 Punkte**

a) Es sei Y eine diskrete Zufallsvariable, die den Wert (-3) mit der Wahrscheinlichkeit 0.3, den Wert (-1) mit der Wahrscheinlichkeit 0.4, den Wert 0 mit der Wahrscheinlichkeit 0.2 und den Wert 3 mit der Wahrscheinlichkeit 0.1 anmimmt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(|Y - E(Y)| \leq V(Y)/|E(Y)|)$.

b) Bestimmen Sie die positive Konstante c so, dass

$$f(x) := \begin{cases} c \cdot (\mathrm{e}^{0.5x} + 1) & \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

die Wahrscheinlichkeitsdichte einer stetigen Zufallsvariablen X ist, und bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Hinweis: Hilfsformel zur Bestimmung der Integrale:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2}(ax-1)\right) = x\mathrm{e}^{ax}, \quad \frac{d}{dx}\left(\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) \cdot \mathrm{e}^{ax}\right) = x^2\mathrm{e}^{ax}, \quad \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

Aufgabe 2 **11 Punkte**

a) In einem Kühltheke sind 9 Tüten Frischmilch, die wegen des Haltbarkeitsdatums verbilligt angeboten werden. 4 davon sind am nächsten Tag tatsächlich nicht mehr verwendbar. Ein Kunde kauft 6 von den 9 Tüten und wählt diese 6 gleichzeitig und zufällig aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens zwei Tüten erwischt, die am nächsten Tag nicht mehr verwendbar sind?

b) Eine Stadt habe 100 000 Einwohner, von denen 10 000 sind mehr als 60 Jahre alt sind. Es werden zufällig 100 Einwohner ausgewählt und befragt, wobei kein Einwohner mehr als einmal ausgewählt wird. Bestimmen Sie näherungsweise (also nicht exakt) die Wahrscheinlichkeit, dass davon höchstens 13 mehr als 60 Jahre alt sind. Begründen Sie, weshalb die angewandte(n) Näherung(en) gerechtfertigt ist (sind).

Hinweis: Verwenden Sie zur Vereinfachung der Zahlenrechnung die Rechenergebnisse: $0.5/3 = 0.17$ und $10.5/3 = 3.50$.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 **6 Punkte**

Von einer normalverteilten Zufallsvariablen wurde in einer langen Versuchsreihe festgestellt, dass sie mit Wahrscheinlichkeit 0.8413 einen Wert unter 6 und mit Wahrscheinlichkeit $(1 - 0.9987)$ einen Wert über (-2) annimmt. Wie groß sind der Erwartungswert μ und die Varianz σ^2?

Aufgabe 4 **6 Punkte**

Die gemeinsame Verteilung zweier *unabhängiger* ZV X und Y und die Randverteilung sei in der folgenden Tabelle teilweise vorgegeben:

$\downarrow X \mid Y \rightarrow$	-1	0	2	
-2	0.10	$*$	$*$	0.20
0	$*$	$*$	$*$	$*$
2	$*$	$*$	$*$	0.70
	$*$	0.30	$*$	

Bestimmen Sie die noch fehlenden Wahrscheinlichkeiten der gemeinsamen Verteilung und der Randverteilungen.

Aufgabe 5 **6 Punkte**

Eine Beobachtungsgröße sei $N(\mu, \sigma_0)$–verteilt, wobei μ unbekannt und $\sigma_0 = 1.2$ bekannt sei. Bestimmen Sie ein 95%–Konfidenzintervall für μ in der Form $a \leq \mu \leq b$. Dazu steht Ihnen folgendes Ergebnis der Auswertung einer Stichprobe vom Umfang $n = 36$ zur Verfügung:

$$\overline{x} = 15$$

Aufgabe 6 **8 Punkte**

Eine Messgröße sei $N(\mu, \sigma)$–verteilt, wobei μ und σ unbekannt seien. Es soll die Hypothese $H_0 : \mu = 10$ gestestet werden, wobei eine irrtümliche Ablehnung von H_0 nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.10$ erfolgen soll. Zu welchem Testergebnis kommen Sie bei folgendem Ergebnis der Auswertung einer Stichprobe vom Umfang $n = 9$:

$$\overline{x} = 9, \qquad \sum_{i=1}^{9} (x_i - \overline{x})^2 = 72\,.$$

Aufgabe 7 **8 Punkte**

Bei den 10 000 Beschäftigten eines Betriebes soll durch eine Umfrage festgestellt werden, wie viele mehr als 10 km Anfahrtsweg haben. Bestimmen Sie dazu ein 90%–Konfidenzintervall für den unbekannten Anteil p dieser Beschäftigten, wenn bei einer Stichprobe von 400 Beschäftigten, die "ohne Zurücklegen" zufällig ausgewählt wird, 50 davon mehr als 10 km Anfahrtsweg haben.

Begründen Sie, weshalb die angewandte(n) Näherung(en) gerechtfertigt ist (sind). Bei zwei zur Verfügung stehenden Näherungsformeln, genügt es, die **einfachere** (und gröbere) zu verwenden.

Aufgabe 8 **6 Punkte**

Die ZV X nur die Werte 1, 2, 3 und 4, die ZV Y kann nur die Werte 1 und 2 annehmen. Testen Sie mit einem Signifikanzniveau von 1% die Hypothese H_0: X und Y sind unabhängig.

Dazu steht Ihnen das Resultat einer Stichprobe vom Umfang 330 in der folgenden Tabelle von absoluten Häufigkeiten und Randhäufigkeiten zur Verfügung:

$\downarrow X \mid Y \rightarrow$	1	2	$f_{i,*}$
1	25	30	55
2	20	10	30
3	65	84	149
4	60	36	96
$f_{*,j}$	170	160	330

Begründen Sie, weshalb die angewandte(n) Näherung(en) gerechtfertigt ist (sind).

$$\begin{aligned} w = {} & \frac{(330 \cdot 25 - 55 \cdot 170)^2}{330 \cdot 55 \cdot 170} + \frac{(330 \cdot 30 - 55 \cdot 160)^2}{330 \cdot 55 \cdot 160} \\ & + \frac{(330 \cdot 20 - 30 \cdot 170)^2}{330 \cdot 30 \cdot 170} + \frac{(330 \cdot 10 - 30 \cdot 160)^2}{330 \cdot 30 \cdot 160} \\ & + \frac{(330 \cdot 65 - 149 \cdot 170)^2}{330 \cdot 149 \cdot 170} + \frac{(330 \cdot 84 - 149 \cdot 160)^2}{330 \cdot 149 \cdot 160} \\ & + \frac{(330 \cdot 60 - 96 \cdot 170)^2}{330 \cdot 96 \cdot 170} + \frac{(330 \cdot 36 - 96 \cdot 160)^2}{330 \cdot 96 \cdot 160} \\ = {} & 11.92 \end{aligned}$$