Prof. Dr. Klaus Höllig 7. März 2008

Prüfung zur Numerischen Mathematik

Zugelassene Hilfsmittel: 10 eigenhändig beschriebene Seiten DIN A4
Bearbeitungszeit: 120 min.

Zu bearbeiten sind fünf der sechs Aufgaben. Bitte geben Sie nur Lösungen zu fünf Aufgaben ab. Werden zu allen sechs Aufgaben Lösungen abgegeben, wird die Lösung zur Aufgabe 6 nicht gewertet.

Alle wesentlichen Zwischenschritte sind stichwortartig anzugeben, die Angabe eines Ergebnisses allein genügt nur bei Aufgabe eins.

Beschreiben Sie alle Blätter nur einseitig und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt !

Wichtige Hinweise für Wiederholer: Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass bei einigen Fachrichtungen zur Wiederholungsprüfung eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt ein mindestens ausreichendes Ergebnis.

Informieren Sie sich bis spätestens 18. 4. 2008 über Ihr Prüfungsergebnis, das voraussichtlich ab 31. 4. 2008 durch Aushang bei Raum 8.162 bekannt gegeben wird, und vereinbaren Sie gegebenenfalls umgehend im Sekretariat 8.162 einen Termin für die mündliche Nachprüfung. Sie erhalten keine schriftliche Benachrichtigung. Mit der Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtung an.

Aufgabe 1 Geben Sie (ohne Beweis) an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

1. Die Folge $A^n x / \|A^n x\|$ konvergiert genau dann, wenn alle Eigenwerte von A Betrag < 1 haben.

2. Eine Householder-Transformation vergrößert die Absolutbeträge der Matrix-Einträge nicht.

3. Die Methode der konjugierten Gradienten ist ein lineares Iterationsverfahren.

4. Jedes lineare Programm besitzt mindestens eine Lösung.

5. Die Normalengleichungen sind positiv semidefinit.

Aufgabe 2 Zerlegen Sie die Gleitpunkt-Berechnung des Ausdrucks

$$y = e^{x_1}/x_2$$

in elementare Operationen und bestimmen Sie die Konditionszahlen c_k. Geben Sie für $0 < x_1, x_2 \leq 10$ bestmögliche Schranken für c_k an und damit eine Abschätzung für $|\Delta y|/|y|$ bei relativen Fehlern der Eingabewerte $\leq$eps.

Aufgabe 3 Sei A eine Matrix mit einer Cholesky-Zerlegung der Form

$$A = R^{\mathrm{t}} R \,, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} .$$

Schreiben Sie ein MATLAB-Programm

```
function x=solve(a,b),
```

das das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ löst (a und b sind $(n-1)$- bzw. n-Vektoren).

Geben Sie dazu zunächst jeweils die k-te Gleichung der Systeme

$$R^{\mathrm{t}} y = b \,, \quad Rx = y$$

an.

Aufgabe 4 Führen Sie für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

einen Schritt $x \to y$ der Jacobi-Iteration mit Startwert $x = (2, -1)^{\mathrm{t}}$ durch. Bestimmen Sie die Iterationsmatrix Q sowie deren Spektralradius.

Aufgabe 5 Bestimmen Sie für das lineare Programm

$$(5, \alpha, 0)x \to \min \,, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} , \quad x \geq 0 \,.$$

alle zulässige Basislösungen. Geben Sie in Abhängigkeit von dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ an, welche der Lösungen optimal ist.

Aufgabe 6 Anullieren Sie das Element $(3, 1)$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 25 \\ 4 & 25 & 0 \end{pmatrix}$$

durch eine Householdertransformation der letzten beiden Zeilen und geben Sie die Transformationsmatrix Q in der faktorisierten Form $E - \frac{1}{r} dd^{\mathrm{t}}$ an. Transformieren Sie A auf Hessenberg-Form.