Prof. Dr. Klaus Höllig 7. März 2008

Prüfung zur Numerischen Mathematik

Lösungen

Aufgabe 1 Geben Sie (ohne Beweis) an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

1. Die Folge $A^n x / \|A^n x\|$ konvergiert genau dann, wenn alle Eigenwerte von A Betrag < 1 haben.

2. Eine Householder-Transformation vergrößert die Absolutbeträge der Matrix-Einträge nicht.

3. Die Methode der konjugierten Gradienten ist ein lineares Iterationsverfahren.

4. Jedes lineare Programm besitzt mindestens eine Lösung.

5. Die Koeffizientenmatrix der Normalengleichungen ist positiv semidefinit.

Lösung

1. falsch, es genügt, wenn es einen betragsmäßig größten Eigenwert gibt.

2. falsch, der erste Eintrag wird zur Norm der Spalte und diese ist i.A. größer als ein Eintrag.

3. falsch, ein lineares Iterationsverfahren liefert im Allgemeinen nicht die Lösung nach endlich vielen Schritten.

4. falsch, die Zielfunktion kann unbeschränkt sein.

5. richtig, mit $y = Ax$ ist $x^{\mathrm{t}} A^{\mathrm{t}} Ax = (Ax)^{\mathrm{t}} Ax = y^{\mathrm{t}} y = |y|^2 \geq 0$.

Aufgabe 2 Zerlegen Sie die Gleitpunkt-Berechnung des Ausdrucks

$$y = e^{x_1}/x_2$$

in elementare Operationen und bestimmen Sie die Konditionszahlen c_k. Geben Sie für $0 < x_1, x_2 \leq 10$ bestmögliche Schranken für c_k an und damit eine Abschätzung für $|\Delta y|/|y|$ bei relativen Fehlern der Eingabewerte $\leq$eps.

Lösung

Die Rechenschritte sind

$$\begin{aligned} x_3 &= \exp(x_1) \\ y = x_4 &= x_3/x_2 \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Konditionszahlen $c_k = \left|\dfrac{\partial y}{\partial x_k}\right| \left|\dfrac{x_k}{y}\right|$ als

$$\begin{aligned} c_1 &= \left|\frac{\exp(x_1)}{x_2}\right| \left|\frac{x_1}{\exp(x_1)/x_2}\right| = |x_1| \\ c_2 &= \left|\frac{-\exp(x_1)}{x_2^2}\right| \left|\frac{x_2}{\exp(x_1)/x_2}\right| = 1 \\ c_3 &= \left|\frac{1}{x_2}\right| \left|\frac{x_3}{\exp(x_1)/x_2}\right| = 1\,. \end{aligned}$$

Mit der Schranke $c_1 \leq 10$ erhält man

$$\frac{|\Delta y|}{|y|} \leq \mathrm{eps}\left(1 + \sum_{k=1}^{3} c_k\right) = 13\,\mathrm{eps}$$

Aufgabe 3 Sei A eine Matrix mit einer Cholesky-Zerlegung der Form

$$A = R^{\mathrm{t}} R\,, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie ein Matlab-Programm

`function x=solve(a,b)` ,

das das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ löst (a und b sind $(n-1)$- bzw. n-Vektoren). Geben Sie dazu zunächst jeweils die k-te Gleichung der Systeme

$$R^{\mathrm{t}} y = b\,, \quad Rx = y$$

an.

Lösung Die Gleichungen für $R^{\mathrm{t}} y = b$ sind

$$y_1 = b_1\,, \quad y_k + a_{k-1} y_{k-1} = b_k\,,\ 2 \le k \le n$$

bzw. nach y_k aufgelöst

$$y_1 = b_1\,, \quad y_k = b_k - a_{k-1} y_{k-1}\,,\ 2 \le k \le n\,.$$

Für $Rx = y$ ergibt sich

$$x_n = y_n\,, \quad x_k + a_k x_{k+1} = y_k\,,\ n-1 \ge k \ge 1$$

bzw.

$$x_n = y_n\,, \quad x_k = y_k - a_k x_{k+1}\,,\ n-1 \ge k \ge 1\,.$$

Somit ist das Programm

```
function x=solve(a,b)

n=length(b);
y(1)=b(1);
for k=2:n
  y(k)=b(k)-a(k-1)*y(k-1);
end
x(n)=y(n);
for k=n-1:-1:1
  x(k)=y(k)-a(k)*x(k+1);
end
```

Aufgabe 4 Führen Sie für das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

einen Schritt $x \to y$ der Jacobi-Iteration mit Startwert $x = (2, -1)^{\mathrm{t}}$ durch. Bestimmen Sie die Iterationsmatrix Q sowie deren Spektralradius.

Lösung

Allgemein gilt

$$Dy = b - (L + R)x\,, \quad A = L + D + R\,.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} y_1 &= (6 - 2 \cdot (-1))/4 = 2 \\ y_2 &= (5 - 1 \cdot 2)/3 = 1\,. \end{aligned}$$

Die Iterationsmatrix ist

$$\begin{aligned} Q &= -(D)^{-1}(L + R) = -\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und $\varrho = 1/\sqrt{6}\,.$

Aufgabe 5 Bestimmen Sie für das lineare Programm

$$(5, \alpha, 0)x \to \min\,, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}\,, \quad x \geq 0\,.$$

alle zulässige Basislösungen. Geben Sie in Abhängigkeit von dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ an, welche der Lösungen optimal ist.

Lösung Die Basislösungen sind:

- $I = (1,2)\,,\ x_I = (2,3)^{\mathrm{t}}$, zulässig
- $I = (1,3)\,,\ x_I = (8,9)^{\mathrm{t}}$, zulässig
- $I = (2,3)\,,\ x_I = (4,-3)^{\mathrm{t}}$, nicht zulässig

Durch Vergleich der Zielfunktionswerte der beiden zulässigen Basislösungen $f_{1,2} = 10 + 3\alpha\,, f_{1,3} = 40$ erkennt man, dass für $\alpha < 10$ die erste, und für $\alpha > 10$ die zweite Basislösung optimal ist. Für $\alpha = 10$ sind beide Lösungen optimal.

Aufgabe 6 Anullieren Sie das Element $(3, 1)$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 25 \\ 4 & 25 & 0 \end{pmatrix}$$

durch eine Householdertransformation der letzten beiden Zeilen und geben Sie die Transformationsmatrix Q in der faktorisierten Form $E - \frac{1}{r}\, dd^{\mathrm{t}}$ an. Transformieren Sie A auf Hessenberg-Form.

Lösung

Die Householder-Transformation wird auf die unteren beiden Zeilen angewandt, und basiert auf dem Vektor $(3, 4)^{\mathrm{t}}$ mit der Norm 5. Folglich ist

$$d = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad r = \|c\| d_1 = 40\,,$$

d.h.

$$Q = E - \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} (8, 4)\,.$$

Anwendung auf die letzten beiden Zeilen ergibt zunächst

$$\frac{1}{40}\,(8, 4) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 25 \\ 4 & 25 & 0 \end{pmatrix} = (15/25)\,.$$

Multiplikation mit $(8, 4)^{\mathrm{t}}$ und Subtraktion von $A(2:3, :)$ ergibt

$$\begin{pmatrix} -5 & -20 & -15 \\ 0 & 15 & -20 \end{pmatrix}.$$

Da die Symmetrie erhalten bleibt, ist für die Transformation auf Hessenberg-Form nur der letzte untere 2×2-Block zu transformieren. Anstatt die Housholder-Transformation von rechts anzuwenden, multipliziert man den transponierten Blockk mit Q von links. Wie oben folgt zunächst

$$\frac{1}{40}\,(8, 4) \begin{pmatrix} -20 & 15 \\ -15 & -20 \end{pmatrix} = (11/21)$$

und man erhält das Ergebnis

$$\begin{pmatrix} -20 & 15 \\ -15 & -20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} (11/21) = \begin{pmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Hessenberg-Form

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ -5 & 24 & 7 \\ 0 & 7 & -24 \end{pmatrix}.$$