Lösungen zur Vordiplomteilprüfung Mathematik für inf/swt 29. 02. 2008

Aufgabe 1 **(3 Punkte)** Man formuliere die Negation der folgenden Aussagen:

1. Alle Deutschen mögen Bier.

   Es gibt einen Deutschen, der kein Bier mag.

2. Wenn Stuttgart absteigt, dann geht die Welt unter.

   Stuttgart steigt ab, und die Welt geht nicht unter.

3. Es gibt einen Fußballer, dem alle Schiedsrichter unsympathisch sind.

   Jedem Fußballer ist ein Schiedsrichter nicht unsympathisch.

Aufgabe 2 **(6 Punkte)** Man gebe alle invertierbaren Matrizen der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$ an.

Lösung zu 2 A ist genau dann invertierbar, wenn die erste Spalte keine Linearkombination der beiden letzen Spalten ist. Die einzigen Möglichkeiten, aus den beiden letzten Spalten von A eine Spalte mit nur Nullen und Einsen als Einträgen zu erzeugen, sind:

$$\vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $(\lambda, \mu) \in \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,-1)\}$. Dies erzeugt alle Spalten mit $x_1 = x_3$ (und Einträgen nur Null oder Eins). Somit ist A genau dann invertierbar, wenn die erste Spalte eine der folgenden vier ist:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Andere mögliche Antwort: Aus $\det A = x_1 - x_3 \neq 0$ folgt die obige Wahl der Spaltenvektoren.

Aufgabe 3 **(8 Punkte)** Man bestimme für die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

das charakteristische Polynom $P_A(\lambda)$, die Eigenwerte λ_j, $j = 1, 2, 3$ und Eigenvektoren v_j, $j = 1, 2, 3$, sowie eine Matrix M sodaß $M^{-1}AM = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Lösung zu 3 $p_A(\lambda) = (1-\lambda)\lambda(1+\lambda)$, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1$,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad M = (v_1 \;\; v_2 \;\; v_3).$$

Aufgabe 4 **(2+3+4 Punkte)** Man begründe, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren.

Lösung zu 4

	Ja	Nein	Begründung
$\sum_{n=0}^{\infty} n!3^{-n}$		x	keine Nullfolge!
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}$	x		Quotientenkriterium: $\lvert a_{n+1}/a_n \rvert = \frac{2(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to 1/2$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n!}{(2n)^n}$	x		Quotientenkrit.: $\lvert a_{n+1}/a_n \rvert = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^{-n} \to \frac{1}{2e}$

Aufgabe 5 **(8 Punkte)** Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$f_n : I_0 = [0, 100] \to \mathbb{R}, \;\; f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{k e^{kx}}.$$

Lösung zu 5

a) Konvergiert f_n auf I_0 gegen eine Funktion $f : I_0 \to \mathbb{R}$? (ja oder nein): $\boxed{\text{nein}}$

Begründung: $\boxed{f_n(0) \to \infty, \text{ harmonische Reihe}}$

b) Man bestimme das (eindeutige) maximale Intervall $I_1 \subset I_0$ sodaß f_n auf I_1 punktweise gegen eine Funktion $f : I_1 \to \mathbb{R}$ konvergiert. $\boxed{I_1 = (0, 100].}$

c) Man bestimme ein Intervall $I_2 \subset I_0$ sodaß f_n auf I_2 gleichmäßig gegen f konvergiert. $\boxed{I_2 = [\varepsilon, 100],\ \varepsilon > 0.}$

Aufgabe 6 (6 Punkte) Man berechne die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\frac{x^2}{2}-\cos x}{x \sin x}$. b) $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{e^x}$

Lösung zu 6 a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\frac{x^2}{2}-\cos x}{x \sin x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x+\sin x}{\sin x + x\cos x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-1+\cos x}{2\cos x - x \sin x} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} -x = 0$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2}(1+e^{-2x}) = \frac{1}{2}$

Aufgabe 7 6 Punkte Man berechne die Stammfunktionen

a) $\displaystyle\int e^{-x}\cos(5x)\,dx$ b) $\displaystyle\int 2x \cot(x^2)\,dx$

Lösung zu 7 a) $\int e^{-x}\cos(5x)\,dx = -\cos(5x)e^{-x} - 5\int \sin(5x)e^{-x}\,dx$
$= -\cos(5x)e^{-x} + 5\sin(5x)e^{-x} - 25\int \cos(5x)e^{-x}\,dx$
$\Longrightarrow 26\int \cos(5x)e^{-x}\,dx = (5\sin(5x) - \cos(5x))e^{-x} + C$, also
$\int e^{-x}\cos(5x)\,dx = \frac{1}{26}(5\sin(5x) - \cos(5x))e^{-x} + C$

b) $\int 2x\cot(x^2)\,dx$
Substitution: $t = x^2$, $\frac{dt}{dx} = 2x \Longrightarrow dx = \frac{1}{2x}\,dt$ und da $\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$ ist
$\int 2x\cot(x^2)\,dx = \int \frac{\cos t}{\sin t}\,dt = \ln|\sin t| + C = \ln|\sin x^2| + C$

Aufgabe 8 (7 Punkte) Man bestimme Lage und Art der lokalen Extrema von

$$f(x,y) = x^5 + y^5 - 5xy.$$

Lösung zu 8 $\nabla f = 5(x^4 - y, y^4 - x) = 0 \Rightarrow y = x^4 \Rightarrow x(x^{15}-1) = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ oder $(x,y) = (1,1)$ sind kritische Punkte. Die Hessematrix lautet:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 20x^3 & -5 \\ -5 & 20y^3 \end{pmatrix}.$$

Für $(x, y) = (0, 0)$ ist die Hessematrix indefinit, die Eigenwerte von $H_f(0, 0)$ sind ± 5. Es gibt keine Umgebung von $(0, 0)$, wo $f(x, y) \geq 0$ oder $f(x, y) \leq 0$ ist.
Für $(x, y) = (1, 1)$ ist $\det H_f(1, 1) > 0$ und $f_{xx}(1, 1) > 0$. Daher liegt ein Minimum vor.
Andere Begründung: die Hessematrix ist positiv definit.
Folgerung: Im Punkt $(0, 0)$ besitzt die Funktion f ein lokales Minimum: $f(1, 1) = -3$.

Aufgabe 9 (8 Punkte). Man bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu 9
Ansatz:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} e^{\lambda t}. \tag{1}$$

Falls (λ, v) Eigenpaar der Matrix A ist, dann ist (1) Lösung des Differentialgleichungssystems.
Berechnung der Eigenpaare:

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$
Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Es gibt 2 linear unabhängige Eigenvektoren zu $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$:
$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$\Longrightarrow \quad y(t) = c_1 e^t \mathbf{v}_1 + c_2 e^{2t} \mathbf{v}_2 + c_3 e^{2t} \mathbf{v}_3$ ist die allgemeine Lösung.