Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. J. Brüdern

Höhere Mathematik I/II **Diplomvorprüfung** **02.09.08**

2. Klausur

für Studierende der Fachrichtung
el, kyb

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Verlangt** und **gewertet** wird die Bearbeitung **aller 5** Aufgaben. Alle Schritte sind ausreichend zu begründen, eine Angabe der Ergebnisse allein reicht nicht!
- Ergebnisse von unbearbeiteten Aufgaben dürfen im späteren Verlauf verwendet werden.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 handbeschriebene DIN A4 Blätter
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse können voraussichtlich ab Anfang Oktober auf der Seite des Prüfungsamtes (https://studius.uni-stuttgart.de) eingesehen werden. Ankündigung auf der Homepage zu HM II.

  Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Soweit mündliche Nachprüfungen erforderlich sein sollten, so werden die Termine direkt im Anschluss an die Klausureinsicht am 13.10.08 (14.00-17.15) vergeben. Eine individuelle Benachrichtigung der betreffenden Kandidatinnen und Kandidaten erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an der Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (14 Punkte):
Sei V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner gleich 3.

a) Zeigen Sie, dass durch $\varphi : V \to V : p(x) \mapsto p(x+1)$ eine lineare Abbildung erklärt ist.

b) Stellen Sie die lineare Abbildung φ aus (a) bezüglich der Basis $1, x, x^2, x^3$ durch eine Matrix A dar und bestimmen Sie A^{-1}.
Hinweis: Die Abbildung φ^{-1} lässt sich ähnlich wie φ angeben.

c) Zeigen Sie, dass $6, 6x, 3(x^2 - x), x^3 - 3x^2 + 2x$ eine Basis von V ist und bestimmen Sie die Matrix J von φ bezüglich dieser Basis.

Aufgabe 2 (14 Punkte):
Sei B der durch die Hyperbeln $y = \frac{1}{x}$ und $y = \frac{4}{x}$ sowie die Geraden $y = \frac{x}{4}$ und $y = x$ eingeschlossene Bereich in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$.

a) B ist das Bild eines Bereichs B^* der uv–Ebene unter der Koordinatentransformation $x(u,v) = \frac{u}{v}$, $y(u,v) = vu$. Skizzieren Sie B und B^*.

Hinweis: Betrachten Sie die Terme xy und $\frac{y}{x}$.

b) Berechnen Sie die Determinante der Jacobi-Matrix dieser Transformation.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt von B.

d) Berechnen Sie das Integral $\int_B \frac{x}{y^2} d(x,y)$.

Aufgabe 3 (10 Punkte):
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \ f(x,y) = x^3 y + y^3 x - 2$

a) Zeigen Sie, dass eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ x \mapsto g(x)$ existiert, so dass in einer Umgebung von (1,1) die Gleichung $f(x, g(x)) = 0$ erfüllt ist.

b) Bestimmen Sie $g'(1)$ und die Tangente an den Graphen von g in (1,1).

c) Sei $h(x) = f(x, g(x))$. Berechnen Sie $h''(x)$ und damit $g''(1)$. Wie lautet das Taylorpolynom der Ordnung 2 von $g(x)$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$?

Aufgabe 4 (8 Punkte):
Sei $f(x,y) = 3x^3 + x^2 - x + 2xy + y^2$

a) Bestimmen Sie die lokalen Minima, Maxima und Sattelpunkte der Funktion f.

b) Bestimmen Sie die quadratische Taylorentwicklung der Funktion an der Stelle $(-1, 1)$.

Aufgabe 5 (14 Punkte):

Gegeben sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha - 1 \\ 0 & \alpha - 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A(\alpha)$.

b) Bestimmen Sie die Normalform der Quadrik

$$Q : \ x^2 + y^2 + z^2 + 2(\alpha - 1)yz + \alpha\sqrt{2}y + \alpha\sqrt{2}z = 0.$$

Für welches α ergibt sich eine Kugel? Geben Sie den Mittelpunkt und den Radius dieser Kugel im xyz–System an.