IADM, Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

PD Dr. P. H. Lesky

Diplomvorprüfung Mathematik für inf, tpinf, sotech — 28.8.2008

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten.
- Verlangt und gewertet werden **alle 8 Aufgaben**.
- In der Klausur können maximal **55 Punkte** erreicht werden.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** Keine.
- Bei der Bearbeitung der Aufgaben sind alle Lösungsschritte und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen das ausgeteilte Papier und beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.
- Die folgenden Funktionswerte könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Homepage der Vorlesung bekanntgegeben.

  VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer: Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.
Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, erhalten die nötigen Informationen auf der Homepage der Vorlesung.

Aufgabe 1 (6 Punkte): Gegeben ist die komplexe Zahl $z = \dfrac{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.

a) Berechnen Sie $\operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z$.

b) Geben Sie $z_1 = 1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ und $z_2 = 1+\mathrm{i}$ in Polardarstellung an.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe von **b)** die Polardarstellung von z.

d) Ermitteln Sie durch Vergleich der Resultate aus **a)** und **c)** Formeln für $\cos\frac{\pi}{12}$ und $\sin\frac{\pi}{12}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Gegeben ist die Menge $B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Warum ist B eine Basis des $\mathbb{R}^2$?

b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $M_{\mathrm{Id}}^{B,E}$ ($E =$ kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$).

Aufgabe 3 (6 Punkte): Gegeben ist die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} x$$

a) Bestimmen Sie den Kern von L und geben Sie eine Basis des Kerns an.

b) Geben Sie die Dimension des Bildes von L und den Rang von L an.

c) Geben Sie einen Eigenwert von L mit einem zugehörigen Eigenvektor an.
Hinweis: Verwenden Sie die Resultate aus a).

Aufgabe 4 (5 Punkte): Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x^2 + 4x + 2)\mathrm{e}^x$.

a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

$$f^{(n)}(x) = \big(x^2 + 2(n+2)x + (n+2)(n+1)\big)\mathrm{e}^x \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

b) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das Taylorpolynom $T_n(x)$ für $x_0 = 0$.

Aufgabe 5 (9 Punkte): Bestimmen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{4x + 10}{x(x^2 + 2x + 5)}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 6 (5 Punkte): Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{x} + y^2 + x^2 \qquad (*)$$

a) Welche Differentialgleichung erfüllt $u(x) := \dfrac{y(x)}{x}$?
Hinweis: Die Differentialgleichung für u ist separierbar.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen u der Differentialgleichung aus a) und alle Lösungen y von $(*)$.

Aufgabe 7 (10 Punkte): Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} y\,, \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungs-System.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 8 (9 Punkte): Gegeben ist das Quadrat $Q := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1 \wedge -1 \le y \le 1\}$ und die Abbildung $f : Q \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 2x^4$.

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

b) Berechnen Sie für jeden kritischen Punkt die Hessematrix und geben Sie an, ob ein lokales Minimum, Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

c) Weisen Sie nach, dass das in **b)** gefundene lokale Extremum nicht global ist.