Lösungsvorschläge zur Klausur

für mach, umw, fmt, bau, immo, tema, und zugehörige Technikpädagogik

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*
Gegeben ist

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad v := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie *die* Lösung f des Differentialgleichungssystems $Y' = AY$, die das Anfangswertproblem $f(0) = v$ löst.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Rezept 14.2 zur Lösung des Anfangswertproblems:

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Av = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A^2v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

v, Av sind linear unabhängig, v, Av, A^2v sind linear abhängig:

$$A^2v + v = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad y'' + y = 0 \ (HLDGL_2)$$

Bestimme Lösung von $(HLDGL_2)$ mit den Anfangswerten $\left.\begin{array}{l} f_j(0) = v_j \\ f_j'(0) = (Av)_j \end{array}\right\} \quad j = 1, \ldots, 4$:

Fundamentalsystem für $(HLDGL_2)$:
Polynom $p(\xi) = \xi^2 + 1$ hat keine reellen Nullstellen. Daher bilden gemäß Hilfssatz 12.7 $\cos(x), \sin(x)$ ein FS für $(HLDGL_2)$.

Zugehörige Wronski-Matrix $\quad M(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}, \quad M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Damit hat die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems die Form $f_j(x) = r_1^j \cos(x) + r_2^j \sin(x)$ mit $(r_1^j, r_2^j)^T$ Lösungen der linearen Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^j \\ r_2^j \end{pmatrix} = b^j, \quad j = 1, \ldots 4, \quad b^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ b^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ b^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ b^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = \cos(x) - \sin(x), \quad f_3(x) = 0, \quad f_4(x) = \cos(x) + \sin(x).$$

Damit ist

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(x) - \sin(x) \\ 0 \\ \cos(x) + \sin(x) \end{pmatrix}$$

die Lösung des Anfangswertproblems für das Differentialgleichungssystem.

Aufgabe 2: *(22 Punkte)*
Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = 2e^x - e^x(1+x)\sin(x)\,.$$

Bestimmen Sie den Lösungsraum.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
homogene Lösung:
Polynom $p(\xi) = \xi^2 - 2\xi + 1 = (\xi - 1)^2$. Nach Hilfssatz 12.6 bilden die Funktionen e^x, xe^x ein FS des Lösungsraums.

inhomogene Lösung, Ansatzfunktionen:
Lösen der inhomogenen DGl mittels Superpositionsprinzip 13.9: $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$.
zu $h_1(x) = 2e^x$:
Verwende Rezept 13.6 mit $q(x) = 2$, $d = 0$, $\mu = 1$. Wegen $p(\mu) = 0$ liegt Resonanzfall vor.
$p(\xi) = \tilde{p}(\xi)(\xi - 1)^m$ mit $m = 2$, $\tilde{p}(\xi) = 1$ $\rightsquigarrow$ Ansatz $\hat{f}_{p1}(x) = x^2 s_0\, e^x$.
Einsetzen in DGl mit $h_1(x)$ als Störfunktion ergibt

$$\begin{aligned}
2e^x &\overset{!}{=} \hat{f}_{p1}(x) - 2\hat{f}_{p1}'(x) + \hat{f}_{p1}''(x)\\
&= x^2 s_0\, e^x - 2\left\{2xs_0\, e^x + x^2 s_0\, e^x\right\} + 2s_0\, e^x + 4xs_0\, e^x + x^2 s_0\, e^x\\
&= s_0\, e^x(0x^2 + 0x + 2)
\end{aligned}$$

Damit ist $s_0 = 1$ und $\hat{f}_{p1}(x) = x^2 e^x$.
zu $h_2(x) = -(1+x)\sin(x)e^x$:
Verwende Rezept 13.8 mit $q_1(x) = 0$, $q_2(x) = 1 + x$, $d = 1$, $\delta = 1$, $\mu = 1$.
Da $r(\xi) = (\xi - 1)^2 + 1$ kein Teiler von p ist, liegt der Nicht-Resonanzfall vor.

$$\rightsquigarrow \quad \text{Ansatz} \quad \hat{f}_{p2}(x) = \{(s_1 x + s_0)\sin(x) + (t_1 x + t_0)\cos(x)\}\, e^x.$$

Einsetzen in DGl mit $h_2(x)$ als Störfunktion ergibt

$$\begin{aligned}
h_2(x) &\overset{!}{=} \hat{f}_{p2}(x) - 2\hat{f}_{p2}'(x) + \hat{f}_{p2}''(x)\\
&= \big\{(s_1x + s_0)\sin(x) + (t_1x + t_0)\cos(x)\big\}e^x\\
&\quad - 2\big\{s_1\sin(x) + (s_1x + s_0)\cos(x) + t_1\cos(x) - (t_1x + t_0)\sin(x)\\
&\qquad + (s_1x + s_0)\sin(x) + (t_1x + t_0)\cos(x)\big\}e^x\\
&\quad + \big\{s_1\cos(x) + s_1\cos(x) - (s_1x + s_0)\sin(x) - t_1\sin(x) - t_1\sin(x) - (t_1x + t_0)\cos(x)\\
&\qquad + 2\big[s_1\sin(x) + (s_1x + s_0)\cos(x) + t_1\cos(x) - (t_1x + t_0)\sin(x)\big]\\
&\qquad + (s_1x + s_0)\sin(x) + (t_1x + t_0)\cos(x)\big\}e^x\\
&= \big\{-(s_1x + s_0 + 2t_1)\sin(x) - (t_1x + t_0 - 2s_1)\cos(x)\big\}e^x
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $1 = s_0 + 2t_1$, $1 = s_1$, $0 = -t_0 + 2s_1$, $0 = -t_1$,
also $s_0 = 1$, $s_1 = 1$, $t_0 = 2$, $t_1 = 0$ und $\hat{f}_{p2}(x) = \{(1+x)\sin(x) + 2\cos(x)\}\, e^x$.

Partikuläre Lösung nach dem Superpositionsprinzip:

$$\hat{f}_p(x) = \hat{f}_{p1}(x) + \hat{f}_{p2}(x) = \left\{x^2 + (1+x)\sin(x) + 2\cos(x)\right\} e^x$$

inhomogene Lösung, Variation der Konstanten
Ansatz der Variation der Konstanten führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (1+x)e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x(2-(1+x)\sin(x)) \end{pmatrix}$$

Umformungen ergeben

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (2-(1+x)\sin(x)) \end{pmatrix}$$

Die Lösung dieses Systems ist

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int -2x + (x+x^2)\sin(x)\,dx = -x^2 - (x^2+x-2)\cos(x) + (1+2x)\sin(x), \\ c_2(x) &= \int 2-(1+x)\sin(x)\,dx \qquad = 2x + (1+x)\cos(x) - \sin(x)\,. \end{aligned}$$

Man erhält also die partikuläre Lösung via

$$\begin{aligned} \hat{f}_p(x) &= c_1(x)\cdot e^x + c_2(x)\cdot xe^x \\ &= \left\{x^2 + (1+x)\sin(x) + 2\cos(x)\right\} e^x. \end{aligned}$$

Lösungsraum der inhomogenen DGl.

$$\left\{r_1 e^x + r_2 x e^x + \left\{x^2 + (1+x)\sin(x) + 2\cos(x)\right\} e^x \mid r_1, r_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

Aufgabe 3: *(15 Punkte)*
Gegeben ist die Menge

$$B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1, x+y \leq 1\right\}$$

und das Vektorfeld

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon (x,y) \mapsto (x^2+y(y-1),x).$$

Die mit einer positiv orientierten, regulären Parametrisierung versehene Randkurve von B sei mit K bezeichnet.

Bestimmen Sie:

$$\int_K g(s)\,ds.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
Variante: direkte Lösung

$$\int_K g(s)\,ds = \int_\alpha^\beta g(C(t))\cdot C'(t)\,dt$$

Kurvenparametrisierung $C : [-\frac{3\pi}{2}, 1] \to \mathbb{R}^2$

$$C(t) = \begin{cases} (\cos(t), \sin(t)) & t \in [-\frac{3\pi}{2}, 0) \\ (1-t, t) & t \in [0,1) \end{cases} \qquad C'(t) = \begin{cases} (-\sin(t), \cos(t)) & t \in [-\frac{3\pi}{2}, 0) \\ (-1, 1) & t \in [0,1) \end{cases}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_K g(s)\,ds &= \int_{-3\pi/2}^{0} \begin{pmatrix} \cos(t)^2+\sin(t)(\sin(t)-1) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\
&\quad + \int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)^2+t(t-1) \\ 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_{-3\pi/2}^{0} \begin{pmatrix} 1-\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t^2-3t+1 \\ 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_{-3\pi/2}^{0} \left(-\sin(t)+\sin^2(t)+\cos^2(t)\right) dt + \int_0^1 \left(-2t^2+2t\right) dt \\
&= \Big[\cos(t)+t\Big]_{-3\pi/2}^{0} + 2\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right]_0^1 \\
&= 1+0-\left(0-\frac{3\pi}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-0\right) = \frac{4}{3}+\frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

Variante: mit Satz von Green

$$\int_K g(s)\,ds = \iint_{\bar{I}} (\mathrm{rot} g)(x,y)\,dx\,dy$$

mit $\bar{I} = B = B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$,

$$\begin{aligned} B_1 &= \left\{ (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi) \mid r \in (0,1)\,,\ \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right) \right\}\,, \\ B_2 &= \{(x,y) \mid x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x+y \leq 1\} \end{aligned}$$

sowie

$$\mathrm{rot}\, g(x,y) = \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = 1-(2y-1) = 2(1-y).$$

Polarkoordinaten-Transformation für B_1 führt auf

$$\begin{aligned} \psi(0,1) \times \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right) &\to B_1 :\ (r,\varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\,, \\ \det J\psi(r,\varphi) = \det &\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix} = r \end{aligned}$$

Damit ist das gesuchte Integral

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{I}} (\mathrm{rot} g)(x,y)\,dx\,dy &= \iint_{B_1} 2(1-y)\,dx\,dy + \iint_{B_2} 2(1-y)\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 \int_{\pi/2}^{2\pi} 2(1-r\sin(\varphi))r\,d\varphi\,dr + \int_0^1 \int_0^{1-y} 2(1-y)\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 \left[2(r\varphi + r^2\cos(\varphi)\right]_{\pi/2}^{2\pi} dr + \int_0^1 [2(1-y)x]_0^{1-y}\,dy \\ &= \int_0^1 (3r\pi + 2r^2)\,dr + \int_0^1 2(1-y)^2\,dy \\ &= \left[\frac{3\pi r^2}{2} + \frac{2r^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{-2(1-y)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3} + \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 4: *(7 Punkte)*
Gegeben ist das Vektorfeld:

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{x_2} \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

Stellen Sie Phasen-Differentialgleichungssysteme auf und gewinnen Sie damit ein erstes Integral u auf $\mathbb{R}^2$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
Lösungsweg a)
Wähle $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \neq 0\}$; dann ist $g_2(x) \neq 0$ für alle $x \in B$.

$$\text{Phasendifferentialgleichungssystem:} \quad \frac{\partial x_1}{\partial x_2} = \frac{g_1(x_1,x_2)}{g_2(x_1,x_2)} = \frac{e^{x_2}}{2x_1}$$

Dieses wird mittels Trennung der Veränderlichen gelöst:

$$\int 2x_1 dx_1 = \int e^{x_2} dx_2$$
$$\text{also} \quad x_1^2 = e^{x_2} + const.$$

Ein mögliches erstes Integral ist damit die Funktion $\quad u(x_1,x_2) = x_1^2 - e^{x_2}$,
und zwar sogar auf ganz $\mathbb{R}^2$.

Lösungsweg b)
Wähle $B = \mathbb{R}^2$; dann ist $g_1(x) \neq 0$ für alle $x \in B$.

$$\text{Phasendifferentialgleichungssystem:} \quad \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{g_2(x_1,x_2)}{g_1(x_1,x_2)} = \frac{2x_1}{e^{x_2}}$$

Dieses wird mittels Trennung der Veränderlichen gelöst:

$$\int e^{x_2} dx_2 = \int 2x_1 dx_1$$
$$\text{also} \quad e^{x_2} = x_1^2 + const.$$

Ein mögliches erstes Integral ist damit die Funktion $\quad u(x_1,x_2) = e^{x_2} - x_1^2$.

Aufgabe 5: *(8 Punkte)*
Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \pi + 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right).$$

Entwickeln Sie f in eine Fourier-Reihe. Geben Sie hierzu eine Definition der Fourier-Koeffizienten a_0 sowie a_m und b_m für $m \in \mathbb{N}$ an, und bestimmen Sie diese explizit.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:
f ist nicht 2π-periodisch:

$$f(x+2\pi) = \pi + 2\cos\left(\frac{x+2\pi}{2}\right) = \pi + 2\cos\left(\frac{x}{2}+\pi\right) = \pi - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \neq f(x)$$

f ist 4π-periodisch:

$$f(x+4\pi) = \pi + 2\cos\left(\frac{x+4\pi}{2}\right) = \pi + 2\cos\left(\frac{x}{2}+2\pi\right) = \pi + 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$$

Setze also $\alpha = 2\pi$. Die Definition der 2α-periodischen Fourierreihe ist (mit $\frac{n\pi}{\alpha} = \frac{n}{2}$):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{nx}{2}\right) + b_n \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right).$$

Die Funktion f hat bereits die Form einer Fourier-Reihe. Die Fourier-Koeffizienten lassen sich also direkt ablesen. Alternativ können sie natürlich durch Rechnung bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\cos\left(\frac{mx}{2}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2\pi}^{2\pi}\left(1+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cos\left(\frac{mx}{2}\right)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\frac{2}{\pi}\cos(\xi)\right)\cos(m\xi)\,d\xi \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\cos(m\xi)\,d\xi + \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\xi)\cos(m\xi)\,d\xi = \begin{cases} 2\pi+0 = 2\pi & m=0 \\ 0+\frac{2}{\pi}\pi = 2 & m=1 \\ 0+0 & m\geq 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_m &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} f(x)\sin\left(\frac{mx}{2}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2\pi}^{2\pi}\left(1+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{mx}{2}\right)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\frac{2}{\pi}\cos(\xi)\right)\sin(m\xi)\,d\xi \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\sin(m\xi)\,d\xi + \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\xi)\sin(m\xi)\,d\xi = 0 \quad m\in\mathbb{N},
\end{aligned}$$

wobei wir die Orthogonalitätsrelationen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} \pi & \text{für } m = n \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{array} \right\} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = 0 \qquad m,n \in \mathbb{N},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\,dx = 0 \qquad m \in \mathbb{N}$$

genutzt haben.

Einsetzen liefert tatsächlich

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{1x}{2}\right) + 0\sin\left(\frac{1x}{2}\right) + \sum_{n=2}^{\infty}\left(0\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + 0\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right)$$