Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Klausur am 24.07.2008, 09.00 – 11.00.

Bitte unbedingt beachten:

a) Gewertet werden alle acht gestellten Aufgaben.

b) Lösungswege sind anzugeben. Die Angabe des Endergebnisses allein gilt nicht als Lösung. Da *keine* Taschenrechner zugelassen sind, brauchen Zahlenrechnungen, für die man normalerweise einen Taschenrechner benutzen würde, nicht durchgeführt zu werden.
Ausnahme: Zwischenergebnis, für das der Zahlenwert für die weitere Behandlung der Aufgabe unbedingt nötig ist. Dieser Zahlenwert kann aber dann durch Kopfrechnung ermittelt werden.
Ein Endergebnis ist vollständig, wenn zur Ermittlung des Zahlenwertes höchstens die Ausführung der elementaren Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) und die Anwendung elementarer Funktionen ($\exp x (\equiv \mathrm{e}^{\mathrm{x}})$, $\ln x$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, x^y, $\sqrt{x}, \sqrt[y]{x}$) nötig wäre. Z.B. wären $400 \cdot (1.004^{30} - 4)$ oder $\arctan(3.0/\sqrt{13.4})$ gültige Endergebnisse.
Die Bildung von $m!$, des Binomialkoeffizienten, des Betrages, des Skalarproduktes und des Vektorproduktes z.B. gehören *nicht* zu den elementaren Rechenoperationen.

c) Zugelassene Hilfsmittel: 20 Seiten DIN A4 mit Sätzen, Definitionen und Formeln (einschließlich begleitender Text dazu), **aber ohne Aufgaben, ohne Lösungsvorschläge von Aufgaben und auch ohne Beispiele,**
Fremdsprachenwörterbücher (ohne zusätzliche Einträge).

Weitere Hinweise:

a) Wer mindestens 30 Punkte erreicht hat, hat bestanden.

b) Weitere Infos finden Sie im Internet in dem File “allginfo.pdf” im Verzeichnis “`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/WiM_Kolbe_SS08/`”.

c) Einige Werte trigonometrischer Funktionen:
$\sin(k\pi) = 0,\ \cos(k\pi) = (-1)^k,\ \sin(\pi/2 + k\pi) = (-1)^k$ und $\cos(\pi/2 + k\pi) = 0$ für $k \in \mathbb{Z}$;
$\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2},\ \sin(\pi/3) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2,\ \sin(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$.

Aufgabe 1 **13 Punkte**

Für welche(n) Wert(e) des Parameters p besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{llll} -x_1 & -2\,x_2 & +5\,x_3 & = -7 \\ -4\,x_1 & +(1\,-p)\,x_2 & +(p\,-1)\,x_3 & = -3\,p-1 \\ 3\,x_1 & +2\,x_2 & +(9-4\,p)\,x_3 & = 4\,p-3 \end{array}$$

i) eine (i.a. von p abhängige) eindeutige Lösung,

ii) mehr als eine Lösung,

iii) keine Lösung?

Bestimmen Sie im Fall **ii)** die Lösungsmenge (oder die allgemeine Lösung) und für $p = 1$ die Lösung des obigen linearen Geichungssystems.

Verwendbare *Rechenergebnisse* (zur Vereinfachung der Zahlenrechnung) :
$\sqrt{14^2 - 33 \cdot 4} = 8$, $11^2 = 121$ und $12 \cdot 11 = 132$.

Aufgabe 2 **6 Punkte**

Prüfen Sie, ob die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -3 \\ 3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse A^{-1}.

Aufgabe 3 **5 Punkte**

Die Abhängigkeit der Nachfrage von Ware A vom Preis $p\,(>0)$ sei durch $N_A(p) := 30\,p^{-3.5}$ und die von Ware B durch $N_B(p) := 20 - 10\,p$ beschrieben. In welchem Preisintervall sind beide Nachfragen positiv? In welchem Teilintervall davon reagiert die Nachfrage nach A stärker auf Preisänderungen als die Nachfrage nach B?

– bitte wenden –

Aufgabe 4 **9 Punkte**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (wobei auch ∞ als Grenzwert zugelassen ist):

$$\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{4x^2-8x+4}, \qquad \lim_{x\to 1+} (x-1)^2 \cdot \ln(x-1), \qquad \lim_{x\to 0+} (\sin x)^{2/\ln x}.$$

Aufgabe 5 **16 Punkte**

Bestimmen Sie das absolute Maximum und das absolute Minimum der Funktion $f(x,y) := 2\,x^3 + 3\,x^2 - 12\,y^2 - 9$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) := x^2 + y^2 - 25 \stackrel{!}{=} 0$.

Verwendbare *Rechenergebnisse* (zur Vereinfachung der Zahlenrechnung) :
$12 \cdot 25 = 300$, $13 \cdot 25 = 325$, $7 \cdot 25 = 175$.

Aufgabe 6 **16 Punkte**

a) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$y'(x) = e^x \cdot \frac{1}{\sin(y(x))}, \quad y(1) = \pi/2.$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y''(x) + 4y'(x) - 5y(x) = 52 \cdot \cos x\,.$$

Aufgabe 7 **10 Punkte**

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der folgenden Differenzengleichung:

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 9y_n = 7 \cdot 2^n\,.$$

Aufgabe 8 **7 Punkte**

Vorgegeben seien die Ebenen

$$E_1 : -x_1 \qquad + 3\,x_3 \;=\; 4$$

und

$$E_2 : \qquad - x_2 - 4\,x_3 \;=\; 4\,.$$

Bestimmen Sie ...

a) ... die Schnittgerade der beiden Ebenen E_1 und E_2 .

b) ... den Winkel α zwischen den beiden Ebenen E_1 und E_2 .