Statistik II für Wirtschaftswissenschaftler

Klausur am 31.07.2008, 09.00–11.00.

Bitte unbedingt beachten:

a) Gewertet werden alle 8 gestellten Aufgaben.

b) Lösungswege sind anzugeben. Die Angabe des Endergebnisses allein gilt nicht als Lösung. Da *keine* Taschenrechner zugelassen sind, brauchen Zahlenrechnungen, für die man normalerweise einen Taschenrechner benutzen würde, nicht durchgeführt zu werden.
Ausnahme: Zwischenergebnis, für das der Zahlenwert für die weitere Behandlung der Aufgabe unbedingt nötig ist. Dieser Zahlenwert kann aber dann durch Kopfrechnung ermittelt werden.
Ein Endergebnis ist vollständig, wenn zur Ermittlung des Zahlenwertes höchstens die Ausführung der elementaren Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) und die Anwendung elementarer Funktionen ($\exp x (\equiv \mathrm{e}^{\mathrm{x}})$, $\ln x$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, a^x, $\sqrt{x}$) nötig wäre. Z.B. wären
$400 \cdot (1.004^{30} - 4)$ oder $\arctan(3.0/\sqrt{13.4})$ gültige Endergebnisse.
Die Bildung von $m!$ und des Binomialkoeffizienten z.B. gehören *nicht* zu den elementaren Rechenoperationen.

c) Zugelassene Hilfsmittel:
12 Seiten DIN A4 mit Sätzen, Definitionen und Formeln (einschließlich begleitender Text dazu), **aber ohne Aufgaben, ohne Lösungsvorschläge von Aufgaben und auch ohne Beispiele,**
Fremdsprachenwörterbücher (ohne zusätzliche Einträge),
Tabelle der Standardnormalverteilung ohne zusätzliche Einträge ,
Tabelle der Quantile der χ^2–Verteilung ohne zusätzliche Einträge ,
Tabelle der Quantile der t–Verteilung ohne zusätzliche Einträge.

Weitere Hinweise:

a) Wer mindestens 30 Punkte erreicht hat, hat bestanden.

b) Weitere Infos finden Sie im Internet in dem file "allginfo.pdf" im Verzeichnis "`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/WiS_Kolbe_SS08/`".

Aufgabe 1 **5 Punkte**

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{2\cdot \mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2-1}\cdot \mathrm{e}^{-2x} & \text{für } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

sei die Wahrscheinlichkeitsdichte einer stetigen Zufallsvariablen X. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Hinweis: Hilfsformel zur Bestimmung der Integrale:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2}\cdot(a\,x-1)\right) = x\,\mathrm{e}^{ax}, \quad \frac{d}{dx}\left(\left(\frac{x^2}{a}-\frac{2x}{a^2}+\frac{2}{a^3}\right)\cdot \mathrm{e}^{ax}\right) = x^2\,\mathrm{e}^{ax}$$

Aufgabe 2 **12 Punkte**

a) Die Zahl der an einem Bankautomaten ankommenden Kunden sei Poisson–verteilt, wobei die Standardabweichung bekannt sei, und zwar hat sie den Wert $\sqrt{3} = 1.73$. Wie groß ist Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 3 und 5 Kunden (beide Grenzen eingeschlossen) in einer Minute ankommen?

b) Von den 20 000 Studenten einer Universität wohnen 5 000 mehr als 10 km vom Studienort entfernt. Es werden zufällig 300 Studenten ausgewählt und befragt, wobei kein Student mehr als einmal ausgewählt wird. X sei die Anzahl derjenigen unter diesen 300 Studenten, die mehr als 10 km vom Studienort entfernt wohnen. Bestimmen Sie näherungsweise (also nicht exakt) die Wahrscheinlichkeiten

b$_1$) $P(|X - E(X)| \le 8)$,

b$_2$) $P(X = E(X))$.

Begründen Sie, weshalb die angewandte(n) Näherung(en) gerechtfertigt ist (sind).
Verwendbare Rechenergebnisse: $17/15 = 1.13$, $16/15 = 1.06$, $1/15 = 0.07$.

Aufgabe 3 **5 Punkte**

Von einer normalverteilten Zufallsvariablen X wurde in einer langen Versuchsreihe festgestellt, dass mit Wahrscheinlichkeit 0.9544 die Abweichung der ZV X von ihrem Erwartungswert höchstens 1 beträgt, und dass sie mit Wahrscheinlichkeit $(1 - 0.9772)$ einen Wert über 4 annimmt. Wie groß sind der Erwartungswert μ und die Varianz σ^2?

Aufgabe 4 **6 Punkte**

Die gemeinsame Verteilung zweier ZV X und Y und die Randverteilung sei in der folgenden Tabelle teilweise vorgegeben:

$\downarrow X \mid Y \rightarrow$	-1	0	1	
-2	0.10	$*$	0.10	0.30
0	$*$	0.05	0.10	$*$
2	0.05	$*$	$*$	$*$
	0.30	$*$	$*$	

Außerdem sei der Erwartungswert von $X \cdot Y$ bekannt: $E(X \cdot Y) = 0.50$.
Bestimmen Sie die noch fehlenden Wahrscheinlichkeiten der gemeinsamen Verteilung und der Randverteilungen.

Aufgabe 5 **9 Punkte**

Eine Beobachtungsgröße sei $N(\mu, \sigma_0)$–verteilt, wobei μ unbekannt und $\sigma_0 = 1.2$ bekannt sei. Bestimmen Sie ein 90%–Konfidenzintervall für μ in der Form $a \leq \mu \leq b$. Dazu steht Ihnen folgendes Ergebnis der Auswertung einer Stichprobe vom Umfang $n = 64$ zur Verfügung:

$$\overline{x} = 16$$

Wie ist das Konfidenzintervall exakt zu interpretieren?

Aufgabe 6 **10 Punkte**

Eine Messgröße sei $N(\mu, \sigma)$–verteilt, wobei μ und σ unbekannt seien. Es soll die Hypothese $H_0 : \mu \leq 80$ gegen die Hypothese $H_1 : \mu \geq 82$ getestet werden, wobei eine irrtümliche Ablehnung von H_0 nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $\alpha = 0.10$ und eine irrtümliche Ablehnung von H_1 nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $\beta = 0.05$ erfolgen soll. Zu welchem Testergebnis kommen Sie, wenn die Auswertung einer Stichprobe vom Umfang 10 die Werte

$$\overline{x} = 81, \qquad \sum_{i=1}^{10} (x_i - \overline{x})^2 = 90\,.$$

ergibt?
Bei einer zweiten Stichprobe kommt man zu einer Ablehnung von H_0. Ist dies gleichbedeutend mit einer Annahme von H_1? Begründen Sie Ihre Anwort.

Aufgabe 7 **8 Punkte**

Eine Lieferung von 100 000 Stück soll höchstens 1% defekte Stücke enthalten. Für die Wahrscheinlichkeit p für die Ziehung eines defekten Stückes soll also die Hypothese $H_0 : p \leq 0.01$ (etwa) gegen die Hypothese $H_1 : p \geq 0.011$ gestestet werden, und zwar mit 0.05 für die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. und 2. Art.

a) Es werden 150 zufällige Ziehungen m.Z. durchgeführt. Zu welchem Testergebnis kommen Sie, wenn dreimal ein defektes Stück gezogen wird?
Benötigte Rechenergebnisse: $0.95/(0.99^{150}) = 4.290\,,\quad 150/99 = 1.515$
und $75 \cdot 149/(99^2) = 1.140$

b) Über welchem Wert u muss bei einer evtl. zweiten Stichprobe der Stichprobenumfang liegen, damit die Hypothese H_1 überhaupt mit ausreichender Sicherheit abgelehnt werden kann?

Aufgabe 8 **6 Punkte**

Die ZV X kann nur die Werte 1, 2, 3 und 4, die ZV Y nur die Werte 1, 2 und 3 annehmen. Testen Sie mit einem Signifikanzniveau von 5% die Hypothese H_0: X und Y sind unabhängig.

Dazu steht Ihnen das Resultat einer Stichprobe vom Umfang 500 in der folgenden Tabelle von absoluten Häufigkeiten und Randhäufigkeiten zur Verfügung:

$\downarrow X\|Y \rightarrow$	1	2	3	$f_{i,*}$
1	81	40	79	200
2	41	22	37	100
3	39	20	41	100
4	42	18	40	100
$f_{*,j}$	203	100	197	500

Begründen Sie, weshalb die angewandte(n) Näherung(en) gerechtfertigt ist (sind).

Benötigtes Rechenergebnis:

$$w = \frac{(500 \cdot 81 - 200 \cdot 203)^2}{500 \cdot 200 \cdot 203} + \frac{(500 \cdot 40 - 200 \cdot 100)^2}{500 \cdot 200 \cdot 100} + \frac{(500 \cdot 79 - 200 \cdot 197)^2}{500 \cdot 200 \cdot 197}$$
$$+ \frac{(500 \cdot 41 - 100 \cdot 203)^2}{500 \cdot 100 \cdot 203} + \frac{(500 \cdot 22 - 100 \cdot 100)^2}{500 \cdot 100 \cdot 100} + \frac{(500 \cdot 37 - 100 \cdot 197)^2}{500 \cdot 100 \cdot 197}$$
$$+ \frac{(500 \cdot 39 - 100 \cdot 203)^2}{500 \cdot 100 \cdot 203} + \frac{(500 \cdot 20 - 100 \cdot 100)^2}{500 \cdot 100 \cdot 100} + \frac{(500 \cdot 41 - 100 \cdot 197)^2}{500 \cdot 100 \cdot 197}$$
$$+ \frac{(500 \cdot 42 - 100 \cdot 203)^2}{500 \cdot 100 \cdot 203} + \frac{(500 \cdot 18 - 100 \cdot 100)^2}{500 \cdot 100 \cdot 100} + \frac{(500 \cdot 40 - 100 \cdot 197)^2}{500 \cdot 100 \cdot 197}$$
$$= 0.7366$$