Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. W. Rump

Höhere Mathematik III **Diplomvorprüfung** **01.09.08**

1. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
aer, autip, verf, wewi

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- Es gibt insgesamt **6 Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 handbeschriebene DIN A4 Blätter, Tabelle für die Laplace–Transformation.
- Bei den **Aufgaben 1–4** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht!
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die folgenden Angaben könnten hilfreich sein:

  Laplacetransformierte ($n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$):

f	f'	f''	t^n	e^{at}	$t^n \cdot e^{at}$
$L(f)(s)$	$sL(f)(s) - f(0)$	$s^2L(f)(s) - sf(0) - f'(0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

f	$\sin(at)$	$\cos(at)$	$\sinh(at)$	$\cosh(at)$	$t \cdot \sin t$	$t \cdot \cos t$
$L(f)(s)$	$\frac{s}{a^2+s^2}$	$\frac{a}{a^2+s^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{2s}{(s^2+1)^2}$	$\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$

- In dieser Klausur können bis zu **55 Punkte** erreicht werden.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab Mitte Oktober im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 7. Stock (bei dem Seminarraum 7.527) durch Aushang bekannt gegeben (Ankündigung auf der Homepage zu HM III).

  Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Soweit mündliche Nachprüfungen erforderlich sein sollten, werden die nötigen Informationen zusammen mit den Prüfungsergebnissen bekannt gegeben. Eine individuelle Benachrichtigung der betreffenden Kandidatinnen und Kandidaten erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an der Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (9 Punkte): Sei B der durch die Ellipsen $x^2 + 4y^2 = 4$ und $x^2 + 4y^2 = 16$ sowie die Geraden $y = x$ und $y = 0$ eingeschlossene Bereich im ersten Quadranten der xy-Ebene.

a) Die Koordinatentransformation

$$x = 2r\cos t\,,\ \ y = r\sin t$$

bildet einen Bereich B^* der $rt-$Ebene auf B ab. Skizzieren Sie B und B^*.

b) Berechnen Sie die Jacobi-Determinante der Transformation.

c) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\iint\limits_B \frac{xy}{x^2+4y^2}\,dF$.

Aufgabe 2 (11 Punkte): Gegeben sei der Körper

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |z| \le x^2 + y^2 \le 1, |x| \le y\}.$$

a) Skizzieren Sie das zweidimensionale Gebiet $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le y, x^2 + y^2 \le 1\}$.

b) Stellen Sie den Körper K mit Hilfe von Zylinderkoordinaten (r, φ, z) dar.

c) Berechnen Sie das Volumen V von K.

d) Bestimmen Sie den Schwerpunkt von K.

Aufgabe 3 (7 Punkte): Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) := \frac{1}{(3+y)\cdot\ln(2-x)} \qquad (x < 2, y \neq -3)$$

sowie das Gebietsintegral

$$I := \int_{-2}^{0}\left[\int_{-1}^{1+y} f(x,y)\,dx\right]dy + \int_{0}^{1}\left[\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx\right]dy.$$

a) Skizzieren Sie das Integrationsgebiet.

b) Berechnen Sie I durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge und Veränderung der Grenzen.

Name: 　　　　　　　　 **Matrikel–Nr.:**

Hinweise:

- Tragen Sie Name und Matrikelnummer in die oben vorgesehenen Kästchen ein und geben Sie dieses Blatt zusammen mit Ihren anderen Ausarbeitungen ab.
- **Mit Ausnahme von Aufgabe 4c)** wird bei den **Aufgaben 4 – 6** der Lösungsweg weder verlangt noch gewertet und es genügt, die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen einzutragen.
- **Beachten Sie auch die Aufgaben auf der Rückseite des Blattes.**

Aufgabe 4 (9 Punkte): Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x^2 + y^5 z \\ e^x - \sin^2 z \\ xyz \end{pmatrix}$ mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Ferner sei $K = \{\vec{r} \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 0 \leq z \leq 3\}$.

a) Berechnen Sie: $\operatorname{div} \vec{F} = \boxed{}$.

b) Drücken Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) aus:

Berechnen Sie die zugehörige Jacobimatrix: $J =$

c) Berechnen Sie das Volumenintegral (**Hier wird auch der Rechenweg bewertet!**)

$$\iiint\limits_K (\operatorname{div} \vec{F}) dx\, dy\, dz =$$

d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Oberfläche von K: Fläche$(\partial K) =$

e) Bestimmen Sie das Oberflächenintegral: $\oint\limits_{\partial K} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{o} =$

Aufgabe 5 (7 Punkte): Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y''(x) + 2\,y'(x) = e^{-2x},\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0 \quad (*)$$

a) Bestimmen Sie Laplace-Transformierte der Lösung $y(x)$ von $(*)$:

$L(y)(s) =$ $\boxed{}$.

b) Die Umkehrtransformation L^{-1} ist linear. Zerlegen Sie $L(y)$ mittels Partialbruchzerlegung in Terme, für die Sie die Umkehrtransformation mit Hilfe der Tabelle durchführen können.

$L(y)(s) =$ $\boxed{}$.

c) Geben Sie damit die Lösung von $(*)$ an.

$y(x) =$ $\boxed{}$.

Aufgabe 6 (12 Punkte):

a) Gegeben sei die Differenzialgleichung $\quad y'' - 2y' + 2y = 3e^x \sin 2x \quad (\mathbf{1})$

i) Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet $y_h =$ $\boxed{}$

ii) Ersetzen Sie die rechte Seite der DGL durch den Imaginärteil einer komplexen Funktion g : $e^x \sin 2x = \operatorname{Im} g(x)$ mit $g(x) =$ $\boxed{}$

iii) Bestimmen Sie damit eine partikuläre Lösung von $y'' - 2y' + 2y = g(x)$:

$y_p =$ $\boxed{}$

iv) Wie lautet damit die allgemeine reelle Lösung von $(\mathbf{1})$?

$y =$ $\boxed{}$

b) Gegeben sei die DGL $\quad 2x\,dx + x^2\,dy = 0 \quad (\mathbf{2})$.

i) Zeigen Sie, dass die DGL nicht exakt ist.

$\boxed{}$

ii) Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor $g(y)$, der nur von y abhängt.

$g(y)$ genügt der Differenzialgleichung $\boxed{}$.

Damit ist $g(y) =$ $\boxed{}$.

iii) Die allgemeine Lösung von $(\mathbf{2})$ lautet damit $\boxed{}$