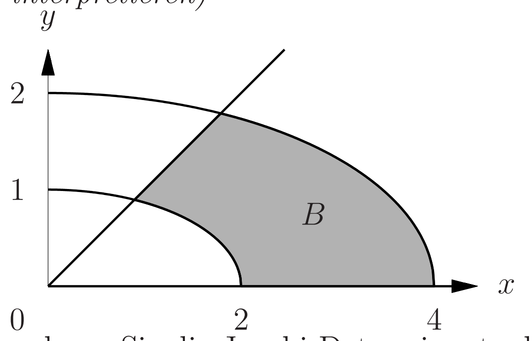
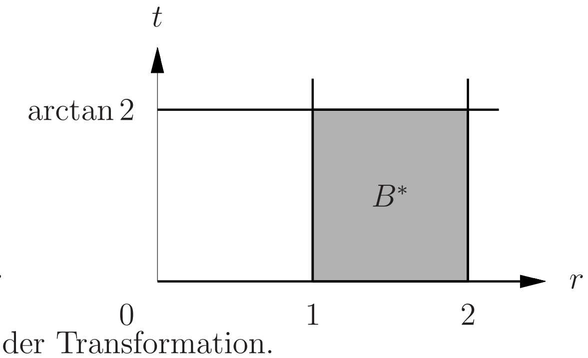
Sei B der durch die Ellipsen $x^2+4y^2=4$ und $x^2+4y^2=16$ sowie die Geraden $y=x$ und $y=0$ eingeschlossene Bereich im ersten Quadranten der xy-Ebene.

a) **Lösung:** *Der durch die Ellipsen* $x^2+4y^2=4$ *und* $x^2+4y^2=16$ *und durch die beiden Geraden* $y=x$ *und* $y=0$ *begrenzte Bereich* B *ist Bildmenge der Transformation* $x=2r\cos t$, $y=r\sin t$ *mit dem Urbildmenge* B^*. B^* *wird begrenzt durch* $r=1$, $r=2$. *Die untere Grenze des Winkels ist* $t=0$, *die obere ergibt sich aus der Steigung der ersten Winkelhalbierenden zu*

$$1=m=\frac{y}{x}=\frac{r\sin t}{2r\cos t}=\frac{1}{2}\tan t \qquad \Rightarrow \qquad t=\arctan 2\approx 1,11\,.$$

(Achtung: Da in elliptischen Koordinaten gerechnet wird, ist die Variable t *nicht als Winkel zu interpretieren)*





b) Berechnen Sie die Jacobi-Determinante der Transformation.

Lösung: *Berechnung der Funktionaldeterminante mit Hilfe der Jacobi-Matrix:*

$$\det J \;=\; \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2\cos t & -2r\sin t \\ \sin t & r\cos t\end{pmatrix} = 2r(\cos^2 t+\sin^2 t)=2r$$

c) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\iint\limits_B \frac{xy}{x^2+4y^2}\,dF\,.$

Lösung: *Mit den elliptischen Koordinaten* $x=2r\cos t$, $y=r\sin t$ *und der Funktionaldeterminante* $\det J=2r$ *folgt somit für das Bereichsintegral :*

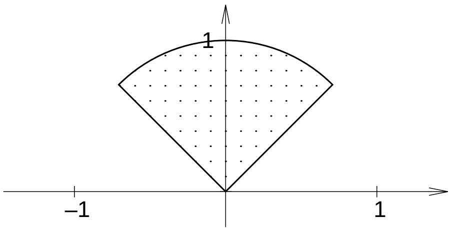
$$\begin{aligned}
\iint\limits_B \frac{xy}{x^2+4y^2}\,dF &= \int_0^{\arctan 2}\int_1^2 \frac{2r\cos t\;r\sin t}{4r^2\cos^2 t+4r^2\sin^2 t}\,\underbrace{2r}_{=|\det J|}\,dr\;dt \\
&= \int_0^{\arctan 2}\int_1^2 r\cos t\sin t\;dr\;dt \;=\; \int_0^{\arctan 2}\left[\frac{1}{2}\,r^2\cos t\sin t\right]_1^2 dt \\
&= \int_0^{\arctan 2}\frac{3}{2}\,\cos t\sin t\;dt \;=\; \left[\frac{3}{4}\,\sin^2 t\right]_0^{\arctan 2} = \frac{3}{5}\,.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, dass $\sin^2(\arctan\varphi)=\varphi^2/(1+\varphi^2)$.

Gegeben sei der Körper

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |z| \le x^2 + y^2 \le 1, |x| \le y\}.$$

a) Skizzieren Sie das zweidimensionale Gebiet $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le y, x^2 + y^2 \le 1\}$.



b) Stellen Sie den Körper K mit Hilfe von Zylinderkoordinaten (r, φ, z) dar.

Lösung: $K := \left\{(r, \varphi, z) : r \in [0, 1], \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right], z \in [-r^2, r^2]\right\}$

c) Berechnen Sie das Volumen V von K.

Lösung:

$$\begin{aligned} V_K \quad &:= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^1 \int_{-r^2}^{r^2} r \, dz \, dr \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^1 2\, r^3 dr \\ &= \pi \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^1 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

d) Bestimmen Sie den Schwerpunkt von K.

Lösung: *Aus Symmetrie-Gründen folgt:* $z_S = x_S = 0$

$$\begin{aligned} V_K \cdot y_S \quad &:= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^1 \int_{-r^2}^{r^2} r \sin\varphi \, r \, dz \, dr \, d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin\varphi \, d\varphi \cdot \int_0^1 2\, r^4 \, dr \\ &= -\cos\varphi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \frac{2}{5} r^5 \Big|_0^1 = \frac{2}{5}\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad y_S = \frac{8}{5\,\pi}\sqrt{2} \end{aligned}$$

Gegeben sei die Funktion

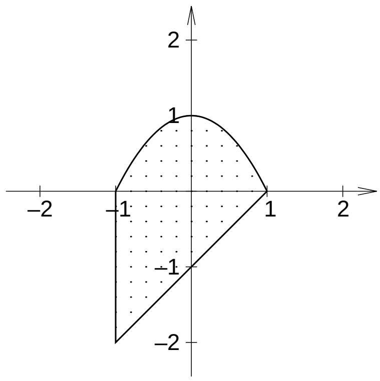
$$f(x,y) := \frac{1}{(3+y)\cdot \ln(2-x)} \qquad (x<2, y \neq -3)$$

sowie das Gebietsintegral

$$I := \int_{-2}^{0} \left[\int_{-1}^{1+y} f(x,y)\,dx \right] dy + \int_{0}^{1} \left[\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx \right] dy.$$

a) Skizzieren Sie das Integrationsgebiet.

Lösung:



b) Berechnen Sie I durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge und Veränderung der Grenzen.

Lösung:

$$\begin{aligned} I &:= \int_{-1}^{1} \int_{x-1}^{1-x^2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\ln(2-x)} \ln(3+y)\Big|_{x-1}^{1-x^2} dx \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\ln(2-x)} (\ln(4-x^2) - \ln(2+x))\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\ln(2-x)} \ln\frac{4-x^2}{2+x}\,dx = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 \end{aligned}$$

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x^2 + y^5 z \\ e^x - \sin^2 z \\ xyz \end{pmatrix}$ mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Ferner sei $K = \{\vec{r} \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \le 0 \le z \le 3\}$.

a) Berechnen Sie: $\operatorname{div} \vec{F} = \boxed{2x + xy}$.

b) Drücken Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) aus:

$$\boxed{x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ \ z = z,\ 1 \le r \le 2,\ \tfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \tfrac{3\pi}{2},\ 0 \le z \le 3}$$

Berechnen Sie die zugehörige Jacobimatrix: $J = \boxed{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

c) Berechnen Sie das Volumenintegral (**Hier wird auch der Rechenweg bewertet!**)

$$\iiint_K (\operatorname{div} \vec{F}) dx\, dy\, dz =$$

$$\int_{r=1}^{2} \int_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{z=0}^{3} (2r\cos\varphi + r^2 \cos\varphi \sin\varphi) r\, dz\, d\varphi\, dr$$
$$= 3 \int_{r=1}^{2} \Big(2r \underbrace{\sin\varphi \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}}_{-2} + \tfrac{1}{2} r^2 \underbrace{\sin^2\varphi \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}}_{=0} \Big) r\, dr$$
$$= 3 \cdot (-4) \frac{r^3}{3} \Big|_{r=1}^{2} = -4(8-1) = -28$$

d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Oberfläche von K: Fläche$(\partial K) = \boxed{12\pi + 6}$

e) Bestimmen Sie das Oberflächenintegral: $\oint_{\partial K} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{o} = \boxed{-28}$

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y''(x) + 2\,y'(x) = e^{-2x},\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0 \quad (*)$$

a) Bestimmen Sie Laplace-Transformierte der Lösung $y(x)$ von $(*)$:

$$L(y)(s) = \boxed{\frac{2}{s} + \frac{1}{s\,(s+2)^2}}\,.$$

b) Die Umkehrtransformation L^{-1} ist linear. Zerlegen Sie $L(y)$ mittels Partialbruchzerlegung in Terme, für die Sie die Umkehrtransformation mit Hilfe der Tabelle durchführen können.

$$L(y)(s) = \boxed{\frac{9}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s+2)^2} - \frac{1}{4\,(s+2)}}\,.$$

c) Geben Sie damit die Lösung von $(*)$ an.

$$y(x) = \boxed{\frac{9}{4} - \frac{1}{2}\,x\,e^{-2x} - \frac{1}{4}\,e^{-2x}}\,.$$

a) Gegeben sei die Differenzialgleichung $y'' - 2y' + 2y = 3e^x \sin 2x \quad (\mathbf{1})$

i) Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet $y_h = \boxed{c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x.}$

ii) Ersetzen Sie die rechte Seite der DGL durch den Imaginärteil einer komplexen Funktion g : $e^x \sin 2x = \operatorname{Im} g(x)$ mit $g(x) = \boxed{e^{(1+2i)x}}$ [besser: $g(x) = 3e^{(1+2i)x}$]

iii) Bestimmen Sie damit eine partikuläre Lösung von $y'' - 2y' + 2y = g(x)$:

$y_p = \boxed{-e^{(1+2i)x}}$ [Ansatz: $y_p = ce^{(1+2i)x} \Rightarrow c = -1$]

iv) Wie lautet damit die allgemeine reelle Lösung von $(\mathbf{1})$?

$y = \boxed{y_h - e^x \sin 2x}$

b) Gegeben sei die DGL $2x\,dx + x^2\,dy = 0 \quad (\mathbf{2})$.

i) Zeigen Sie, dass die DGL nicht exakt ist.

$$\boxed{(2x)_y = 0 \neq (x^2)_x = 2x}$$

ii) Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor $g(y)$, der nur von y abhängt.

$g(y)$ genügt der Differenzialgleichung $\boxed{g'(y) = g(y)}$.

Damit ist $g(y) = \boxed{e^y}$.

iii) Die allgemeine Lösung von $(\mathbf{2})$ lautet damit $\boxed{F(x,y) = x^2 e^y = C,\ C \in \mathbb{R}}$